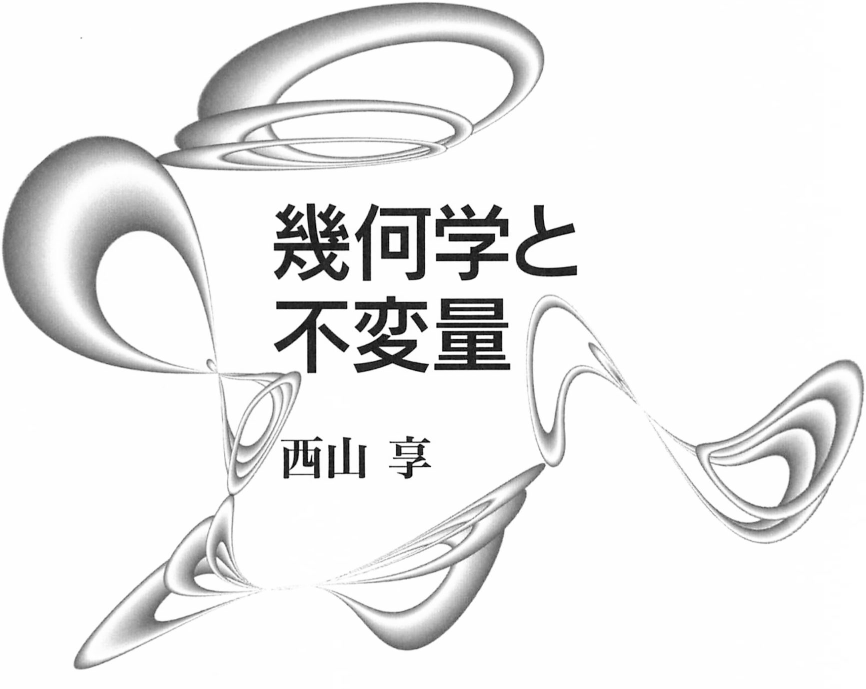
幾何学と不変量

西山 享

日本評論社



幾何学と不変量

西山 享

日本評論社

まえがき

— Nous écrivons des choses éternelles.

— わたしたちは，永遠に変わらないことを書くんだよ．

幾何学は直感の世界であって，難しい問題も補助線を一本ひくとたちどころに証明ができる，というようなことをしばしば耳にする．このような側面に惹かれて幾何学が好きになった人もたくさんいるに違いない．しかし，3 次元くらいまでは直感も効くが，もっと高次元の図形を“見よう”とすると，どうもそれは地上にすむ人間には不可能なようである．4 次元の世界でさえ想像するのは難しい．

直感的な幾何の世界に対して，数式を使って幾何学の問題を解くことも一方ではよく行われる．なんといっても補助線を引くのには少しだけ天才が必要だから，いつも思いつくとは限らない．それに反して，図形を数式で表しておくと，あとは式の変形で答にたどりつく．このような幾何学を解析幾何学あるいは代数幾何学と呼ぶ*)．

この幾何学的な図形に対する直感と，図形を数式で表す，あるいは数式で解くという行為の間には不思議に深い関係がある．我々は別に数式に訴えることなく，距離という概念を生まれながらに獲得するし，日常的に使われる『距離』という言葉は小さな子供にでも理解できる直感的なものである．しかし，古来，この距離は $\sqrt{x^2+y^2}$ といった簡単な 2 次式と平方根を用いて表されることがよく知られていた．考えてみればこれは不思議なことである．人の視覚や触覚，あるいはイメージが作り出す，生物学的には少し複雑そうな概念である距離が，このような単純な数式で表されてしまう不思議．

ある点からの距離が一定の点を集めて得られる，“円”という図形もしたがって 2 次式を用いて書ける．単位円の方程式 $x^2+y^2=1$ はよくご存知であろう．

---

*) 解析幾何学ではおもに軌跡や接線，法線など微分を用いた解析的な量を扱い，代数幾何学では高次の多項式で表された連立方程式の解を図形として扱う．しかし，両者はまぁほとんど同じものである．このような『解析』と『代数』という，一般には対立すると思われる語が同じ意味を表すのに用いられているのはなかなか興味深い．

ところが，その円をパラメータ付けする三角関数はどうかというと，それはもはや 2 次式などという簡単なものではなく超越的な関数である．解析関数としての三角関数の超越的な周期，すなわち円周率 π が，代数的な “円” という循環するシステムを生み出す不思議．

このような不思議とも思える事象の奥には，群による対称性とその対称性によって変わらない不変量がひそんでいる．上の例では “距離” が不変量にあたっているが，本書ではそのような群の作用と不変量がどのように幾何学を規定するのか，そして，幾何学の理解に不変量がどう役立つのか，対称性を使うことによって幾何の定理の証明がいかに見通しよくシンプルになるのかを解説してみたいと思う．

扱う題材はきわめて単純なものばかりである．しかし，点とか直線，そして円といった一見簡単そうな図形が，実は存外に深い，多様な性質を持っていることを発見するのは，著者にとっても貴重な体験であった．読者の方々にも楽しんでいただければ幸いである．

本書はもともと公開講座の内容を元にしている．講座は熱心な聴衆の方に恵まれて楽しいものであったが，書物としてまとめるにあたり，細部を補って，講座で扱えなかった題材も取り込もうとして苦しみつつ試行錯誤するうちに，はや 6 年以上の歳月が流れてしまった．お話をいただいた日本評論社の高橋健一氏には，長い間，辛抱強く完成を待っていただいて大変感謝している．

岡野浩行氏と小川竜氏には，本書の草稿を読んでいただいて貴重なコメントとともに，数多ある間違いやミスプリを指摘してもらった．このお二人の方を最初の読者に迎えることができたのは望外の喜びである．心から感謝する．

2012 年　金環食の月に

目　次

第I部

群と不変式

第1章　群とは何か ― 群の速成コース ―

現代数学において『群』という概念はなくてはならないものである．数学者に「群というものを使わないであなたの研究を紹介してください」と頼むと，おそらく一部の分野をのぞいて大方の数学者にとっては大変な困難が生ずるであろう．もちろん，それは不可能ではない．しかし，群の概念を使わないで説明しようとすると却ってわけがわからなくなるのではないか．それくらい，この概念は数学という総体の中に空気のように溶けこんでしまっている．

そのようなわけで，既に何処かで耳にしたり実際に群を“触って”みたりした方も多いと思う．しかし，一方で，群というものに今まで全く無縁であったり，あるいは単にすれ違ったりしただけの方も多いに違いない．そのような方も心配は御無用である．本書では，代数系としての群が，代数学は言うに及ばず幾何学的な対象やあるいは解析学の場においてどのような役割を果たすのかを紹介したいと思っているので，まず第 1 章では，その中心的な登場人物である「群」について初めての方にも理解できるように解説したいと思う．

群の概念はガロア[1]によって確立されたとされるが，それはもともと“方程式の根”の置換群として考えられ，かつ実現されていた．置換は単にいくつかの対象を入れ替えるという操作なので難しいものではないが，当時群論を数学的に研究することは，いわば 2 次元と 3 次元しか知らないものが一般の高次元の幾何学的対象を考えるのと同様の障碍を持っていたのである．

ガロアの考え方を消化し，さらにそれを一般的な置換の概念へと拡げたのが

---

[1] Galois, Evariste (1811–1832). 方程式のガロア理論によって，代数方程式の根号による可解性の問題を解決する．他に有限体の考察など，若干 21 歳にして決闘に斃れるまでの間に後世に多大な影響を与える研究成果を遺す．[42] 参照．

ジョルダン[2] であった．ジョルダンの置換群の研究はリーやクライン[3] にも影響を与え，リーは微分方程式のガロア理論を模索して連続群論の基礎を構築し，クラインはエルランゲン大学教授への就任講演において，群がある種の幾何学を規定し，幾何学的な対称性が群を生み出すという，大胆な構想を示した．このクラインの講演で示された考え方は後にエルランゲン・プログラム[4]と呼ばれるようになる．

このようにして,「群」は 20 世紀になって数学の研究の中心的な部分に組み込まれてゆく．しかし，群の基本的な概念は非常に素朴で単純なものである．まず，それを見てみることにしよう．

1.1 群の定義

既に代数系という言葉を使ったが，代数系とはどのようなものを指すのかを簡単に説明しておこう．

一般に，ある集合 X が与えられているとしよう．X はどのようなものでもよい．例えば整数の全体でもいいし，実数の全体でもよい．あるいは (平面上の) 単位円のようなものでもいいし，平面上のすべての 3 角形とかでも構わない．このような具体的な例においては，X は単に集合 (ものの集まり) というだけでなく，何らかの性質をあわせ持っているのが普通である．そのなかでも，演算という性質のみに注目したものを**代数系**と呼ぶ．すなわち，代数系と言ったときには，X にもともと備わっている演算以外の性質は “忘れる” ことになる．

さて，普通に演算と言ったときには，和とか差，あるいは積・商といったものが思い浮かぶであろう．これを**四則演算**と呼んでいる．例えば，実数全体の

---

[2] Jordan, Marie Ennemond Camille (1838–1922). 行列のジョルダン標準形や，平面上のジョルダン曲線・ジョルダン測度などでジョルダンの名前を聞いたことのない者はいないだろう．他にも加群における Jordan-Hölder 列の存在，曲線や曲面のホモトピー論などその研究は多岐にわたる．

[3] Lie, Marius Sophus (1842–1899); Klein, Felix Christian (1849–1925). 二人は親友で，1870 年には一緒にジョルダンをパリに訪ねている．クラインは非ユークリッド幾何学のモデルの構築やクラインの壷 (向き付け不可能な曲面のモデルの一つ) などの業績でも知られるように，幾何学に対する強い興味を持っていたが，エルランゲン・プログラムの発表が 1872 年であるから，ジョルダンとの対話が群に対する深い理解を促したのではないかと推察される．残念ながら二人の親密な交遊は 1892 年に破綻するが，1870 年から 1890 年にかけての 20 年間で二人は多くのものを生み出した．

[4] Erlanger Programm (Erlangen program).

集合を $\mathbb{R}$ と書けば[5]，実数 $\mathbb{R}$ には和 (加法) と積 (乗法) が自然に定まっている．和は，2 つの実数 $a,b \in \mathbb{R}$ に対して，1 つの実数 $a+b \in \mathbb{R}$ を対応させるが，積も同様に，やはり 2 つの実数 $a,b \in \mathbb{R}$ に対して 1 つの実数 $a \cdot b \in \mathbb{R}$ を定める．このような対応を**二項演算**と呼ぶ．もっと一般的に n 項演算を次のように定義しよう．

定義 1.1 X を集合とする．集合 X の元の n 個の組 $(x_1,\ldots,x_n)$ $(x_i \in X)$ に対して，X の 1 つの元 $\mu(x_1,\ldots,x_n) \in X$ が定まるとき，X 上に **n 項演算**が与えられているという．n 項演算を総称して多項演算と呼ぶこともある．

集合 X の元の n 個の組全体を X の**直積**と呼んで X^n で表す．

$$X^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_i \in X \ (1 \leq i \leq n)\}.$$

このとき，X 上の n 項演算 μ は写像 $\mu : X^n \to X$ を定めるが，n 項演算と，このような写像は一対一に対応している．

一般に X 上に何種類かの多項演算が与えられていて，それらの間にある種の関係が成り立つとき，X とそれらの演算の組を**代数系**と呼ぶ[6]．

数ある代数系の中でも，群は，唯一つの二項演算を持つような最も単純な代数系として，次のように定義される．

定義 1.2 (群の公理) 集合 G が**群**であるとは，**積**と呼ばれる二項演算

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & g \cdot h \end{array}$$

が与えられており，それが次の性質を満たすときに言う．

(1) **(結合律)** 任意の $g,h,k \in G$ に対して，$g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$ が成り立つ．

(2) **(単位元の存在)** ある元 $e \in G$ が存在して，$g \cdot e = e \cdot g = g$ $(g \in G)$ を満たす．このような e は唯一つに決まるので，これを G の**単位元**と呼ぶ．e は，しばしば ε や 1 とも書き表される．

(3) **(逆元の存在)** 任意の $g \in G$ に対して，$g \cdot h = h \cdot g = e$ となるような $h \in G$ が存在する．h は g に対して唯一通りに決まるので，これを g の**逆元**と呼

5) $\mathbb{R}$ は real numbers の頭文字をとったもので，この字体で表したときは，本書では実数以外の意味には使わない．

6) もっと狭い意味では，群・環・体・半群などを代数系と呼ぶこともある．本書では代数系という言葉は一般的な広い意味で使うことにする．

び，$h=g^{-1}$ と表す．

注意 1.3 一般に G の性質において**可換律** $g\cdot h=h\cdot g$ $(g,h\in G)$ は要請しない．可換律が成り立つような群を**可換群**，あるいは**アーベル群**と呼ぶ[7]．これに対して，必ずしも可換でないことを強調するためにわざわざ G を**非可換群**と呼ぶこともある．

上の定義中に述べたことをここで確認しておこう．そこで G を群とする．群には少なくとも単位元が 1 つは存在するので，G は空集合ではありえないことに注意しよう．

まず，単位元の一意性について．$e,e'\in G$ をどちらも単位元とすると，e が単位元であることから，$e\cdot e'=e'$ が成り立つ．一方，e' が単位元であることを用いると，$e\cdot e'=e$ が成り立つので，結局 $e=e'$ である．つまり両者は一致し，単位元は唯一つである．

次に逆元の一意性を示そう．g に対して，逆元が 2 つ存在したとして，それを h,h' とする．すると $g\cdot h=e$ の両辺に左から h' を掛けて，左辺は

$$\begin{aligned}
h'\cdot(g\cdot h) &= (h'\cdot g)\cdot h && (\because\ \text{結合律})\\
&= e\cdot h && (\because\ h'\ \text{は}\ g\ \text{の逆元})\\
&= h && (\because\ e\ \text{は単位元})
\end{aligned}$$

となり，右辺は

$$h'\cdot e=h'$$

であるから，両者は一致する．つまり $h=h'$ である．

以上では，群の演算を $g\cdot h$ などというように中黒点 $\cdot$ を用いて表したが，これはかなり煩瑣で見苦しいので，しばしばこれを省略する．ただし，誤解が生じそうなときにはこの中黒点を用いることにしよう．

---

7) Abel, Niels Henrik (1802–1829)．一般 5 次方程式の根号による根の公式の非存在を証明．[42] 参照．他に楕円関数論やリーマン面上のアーベル積分の研究で名高い．ノルウェー政府は，素晴らしい業績をあげた数学者を顕彰するため彼の名前を記念してアーベル賞を創設し，2003 年にセール (J. P. Serre) が最初のアーベル賞を受賞した．

1.2 群の例

既に述べたように，群 G は少なくとも単位元を含まなければならない．したがって最小の群として単位元のみからなるものが (可能性として) 考えられる．実際，積を $e \cdot e = e$ と定義すれば結合律を満たし，また逆元は自分自身となって立派に群の公理を満たす．この $G = \{e\}$ を**自明な群**あるいは**単位群**と呼ぶ．

単位群は重要な対象ではあるが，全く構造を持たないので “つまらない”．数学では,『自明』というときに『つまらない』という意味を幾分含んでいることが多いようである．

以下，非自明な群の例をいくつか見てみることにしよう．

例 1.4 (加法群と乗法群) 記号の導入も兼ねて，“数” を要素とする既知の可換群の例をあげよう．

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$: **整数**全体,

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$$: **有理数**全体,

$$\mathbb{R} = \{\text{ 有理数 }\} \cup \{\text{ 無理数}^{8)}\}$$: **実数**全体,

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$: **複素数**全体.

ここで i は**虚数単位**を表す．以下これらの記号を上に列挙した数の集合に対してのみ用いて，他の意味には決して用いないことにする[9]．

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ は，通常の加法 $+$ を演算 (積) として考えれば群になる．加法を演算として考えるので，群の定義において $\cdot$ を使っていた部分は，すべて $+$ に置き換える必要がある．

群の演算を “積” と言っておきながら加法を演算にとるとは何事か，というおしかりを受けそうである．しかし，これは謂わば数学の普遍性と言うべきもので，同じ記号 $\cdot$ であるが局面によってさまざまな二項演算を表すのである．また，群の定義における「積」という言葉には，単に二項演算という以上の意味はなく，具体的に実数や整数の掛け算を表しているわけではない．

さて，加法を演算として採用したとき，これらの数の集合が実際に群になる

---

8) 有理数は循環小数であるのに対して，無理数は非循環無限小数．実数は，ここにあげた数の中で一番定義するのが難しい数の体系である．これについては，例えば [33], [21], [3] などを参照されたい．

9) この他に自然数の集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ もよく用いる記号である．

ことは，容易に確かめることができるだろう．結合律が成り立つことはよく知られている (ので改めて証明する必要はない[10])．単位元は 0 であって，x の逆元は $-x$ である．これも，演算を積で表していたときは e と書いたり，x^{-1} と書いたりしていたのであるが，演算が $+$ なので 0 とか $-x$ などと書くのである．そこで，このような群を特に**加法群**と呼ぶ．

次に，$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ の各場合に対して $K^\times = K \setminus \{0\}$ を考えよう．ここで $K \setminus \{0\}$ は K から 0 を取り除いた集合を表す[11]．だから，例えば $\mathbb{R}^\times$ はゼロでない実数の全体を表している．このとき，$K^\times$ は通常の乗法 (つまり数の掛け算) を演算とする群となる．この場合は，演算が通常の意味でも群の用語においても同じ "積" なので大変都合がよい．演算の記号 $\cdot$ も同じである．なんとなくホッとする．$K^\times$ の単位元は 1 であって，x の逆元は $x^{-1} = 1/x$ で与えられる．このような群を**乗法群**と呼ぶ．

さて，ここで，$\mathbb{Z}^\times$ をどう考えるべきかについて一言注意しておきたい．整数 $\mathbb{Z}$ にはもちろん演算として積が定義されている．しかし $\mathbb{Z}$ から 0 を除いてみたところで群にはならない．それは整数 $a \in \mathbb{Z}$ に対して，その逆元が存在しないからである．

読者の中には,「いや，逆元は存在する．それは $1/a$ である」と反論される方もいるに違いない．それは，しごくもっともな意見である．が，$\mathbb{Z}$ が群になるためには，逆元は $\mathbb{Z}$ の中になければならない．なるほど 1/2 は存在するが，これはもはや整数ではなく，有理数の中で考えられた逆元である．

さて，上で与えた記号 $K^\times$ は実は「0 を除く」という意味ではなく，積に関する逆元を持つような元の全体という意味である．このように，乗法に関する逆元を持っている元を**単元**と呼んでいる．つまり $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ では単元は 0 でない数のことであるから，例えば $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ であって，既に与えた記号 $K^\times$ と矛盾しない．では $\mathbb{Z}^\times$ はどうだろうか? 少し考えてみるとすぐに $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ であることが了解されるであろう．これはたった 2 つしか元がない集合だが，立派な群である．自明な群を除くと，これは一番小さな群となっている．

---

[10] ということにしておこう．

[11] 集合 A, B に対して $A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$ と置いて，A から B を引いた**差集合**と呼ぶ．集合の基本的性質については巻末の附録を参照．

上の例で，$G = \mathbb{C}^\times$ において $H = \{\pm 1, \pm i\}$ (ただし i は虚数単位) を考えると，G の演算 (= 複素数の乗法) を H 内で考えることによって H はまた群となる．このようなとき，H を G の部分群と呼ぶ．

定義 1.5　G を群とする．このとき G の空でない部分集合 H に対して，G の演算によって H 自身が群になるとき，H を G の**部分群**と呼ぶ．つまり，H が部分群であるとは，次の 3 つの条件を満たすことである．

(1) $a, b \in H$ ならば $ab \in H$ である．つまり H は積に関して**閉じ**ている．

(2) G の単位元 e が H に属する (したがって H の単位元にもなる)．

(3) $a \in H$ に対して，G の中で考えた逆元 a^{-1} は H に属する．

演習 1.6　群 G の空でない部分集合 H に対して，H が部分群であることと，任意の $a, b \in H$ に対して $ab^{-1} \in H$ を満たすことは同値であることを示せ．

例 1.7　記号 i, j, k に対して，$G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ と置く．ただし i, j, k は

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{1.1}$$

を満たすような (非可換な) “数”，そして ± 1 は通常の実数のように扱う．つまり $1 \cdot i = i \cdot 1 = i$ とか $(-1) \cdot j = j \cdot (-1) = -j$ といった具合に．これだけでは，すべての要素間の積が定義されていないのだが，もし G が群であって，i, j, k が上のような関係式を満たすとすれば，必然的に i, j, k は次の等式を満たさなければならない．

$$\begin{aligned} ij &= k, & jk &= i, & ki &= j, \\ ji &= -k, & kj &= -i, & ik &= -j. \end{aligned}$$

もちろん 1 は単位元である．逆にこのように積を与えると G は有限の非可換な群をなすことが分かる．一般に，有限個の元からなる群を**有限群**と呼び，元の個数を (少しもったいぶって) G の**位数**と呼ぶ．今の場合 G は位数が 8 の有限群である．

さて G における ± 1 を実数の ± 1 と同一視して

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

と置き，$\mathbb{H}$ に複素数のように自然な加法と乗法を定義しよう．要するに，実数同士は通常のように計算して，実数と i, j, k は可換，あとは分配律や結合律を

用いてあたかも i, j, k の文字式のように計算し[12]，最後に上の関係式を用いて簡約化するのである．例えば，積を計算するには

$$
\begin{aligned}
&(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)\cdot(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)\\
&=a_1a_2+a_1b_2i+a_1c_2j+a_1d_2k+b_1a_2i\\
&\quad+b_1b_2i^2+b_1c_2ij+b_1d_2ik+c_1a_2j+c_1b_2ji\\
&\quad+c_1c_2j^2+c_1d_2jk+d_1a_2k+d_1b_2ki+d_1c_2kj+d_1d_2k^2\\
&=a_1a_2+a_1b_2i+a_1c_2j+a_1d_2k+b_1a_2i\\
&\quad+b_1b_2(-1)+b_1c_2k+b_1d_2(-j)+c_1a_2j+c_1b_2(-k)\\
&\quad+c_1c_2(-1)+c_1d_2i+d_1a_2k+d_1b_2j+d_1c_2(-i)+d_1d_2(-1)\\
&=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)+(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)i\\
&\quad+(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2+d_1b_2)j+(a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2+d_1a_2)k
\end{aligned}
$$

という具合に計算すればよい．どうだ，マイッタカ．こう計算すればよいのは分かっているけど，実際に計算を実行したのは著者にとっても初めてのことかもしれない．いや，きっと初めてだ．まぁ，とにかく，このようにして $\mathbb{H}$ に加法と乗法を定義したものを (ハミルトンの) **四元数体**と呼ぶ[13]．

$\mathbb{H}$ が『体』と呼ばれるのにはわけがある．それは，$\mathbb{H}$ においては加法と乗法だけでなく，減法と除法も (ゼロで割ることを除いて) 行うことができるからである．減法は簡単であるから，割り算ができることを確かめておこう．まず

$$w=a+bi+cj+dk\in\mathbb{H}\quad(a,b,c,d\in\mathbb{R})$$

に対して

$$\overline{w}=a-bi-cj-dk$$

と置き，これを w の**共役**と呼ぶ．簡単な計算で確かめられるように，

$$w\cdot\overline{w}=\overline{w}\cdot w=a^2+b^2+c^2+d^2\geq 0 \tag{1.2}$$

であって，最後の不等式で等号が成り立つのは $w=0$ の場合に限る．そこで，

---

12) 言うまでもないが，積の順序は保ったまま計算することが肝要である．

13) Hamilton, William Rowan (1805–1865).

$|w| = \sqrt{w\overline{w}}$ と定めよう．すると $w \neq 0$ ならば

$$\frac{1}{|w|^2}\overline{w} = \frac{a}{|w|^2} - \frac{b}{|w|^2}i - \frac{c}{|w|^2}j - \frac{d}{|w|^2}k \in \mathbb{H}$$

に対して

$$w \cdot \frac{\overline{w}}{|w|^2} = \frac{\overline{w}}{|w|^2} \cdot w = 1$$

が成り立ち，これは $w^{-1} = \overline{w}/|w|^2$ を意味する．したがって $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ である．一般に，ゼロで割ることを除いて四則演算が自由にできるような代数系を体というが，$\mathbb{H}$ は**非可換体**[14]の例である．この場合，$\mathbb{H}^\times$ は積に関して非可換な群をなしており，$G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ はその有限部分群である．

ところで，式 (1.2) はなかなか面白い式である．というのも，a, b, c, d の 2 次式 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ が因数分解されて，それが

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = w \cdot \overline{w} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk)$$

となっている，というトンデモナイ式だからである．この因数分解は，複素数の範囲で考えていてもだめで，四元数まで数を拡張することによって初めて可能になる．物理学者のディラック[15]は，これに注目して，ラプラシアンを因数分解して見せた．

演習 1.8　パウリ行列[16]を $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と定義する (i は虚数単位を表す)．

(1) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0$ であって，さらに $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_0$ を満たすことを示せ．

(2) $E = \sigma_0, I = i\sigma_1, J = i\sigma_2, K = i\sigma_3$ と置くと E, I, J, K は E を数字の 1 とみなすことによって (1.1) 式と同じ関係式を満たすことを示せ．

(3) 等式 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\sigma_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\sigma_1 + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_2 + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_3\right)^2$ を示せ．

この節では主に『数』のなす群の例を紹介した．しかし，この他にもまだま

---

14) 非可換体のことを斜体とも言う．

15) Dirac, Paul Adrien Maurice (1902–1984). ハイゼンベルグ (W. Heisenberg) とともに量子力学の建設に尽力した．また，ディラックの超関数 δ で有名．他にもディラック作用素など，物理学者ではあるが，彼のアイディアが数学に与えた影響は大きい．

16) Pauli, Wolfgang Ernst (1900–1958).

だ多種多様で面白い群が存在するのである．節を改めて，今しばらく群の例を見てみることにしよう．

1.3　対称群

X を集合として

$$\mathfrak{S}_X = \{\sigma : X \to X \mid \sigma \text{ は全単射}^{17)}\}$$

と置く．ここで『X から自分自身への全単射』とは，集合 X の元をかき混ぜて入れ替えるような変換のことであり，X 上の**置換**と言ったりもする．

このとき，2 つの写像 $\tau : X \to X$ と $\sigma : X \to X$ は**合成**，つまり引き続いて写像を施すことで

$$X \xrightarrow{\tau} X \xrightarrow{\sigma} X$$

という写像を引き起こす．この合成された写像を $\sigma \circ \tau$ あるいは単に $\sigma\tau$ で表す．上の矢印で書いた図式とは σ, τ の順番が違っているが，これは $x \in X$ が合成写像によってどう写るのかを計算するとき $\sigma\tau(x) = \sigma(\tau(x))$ と，自然な順番で括弧をつければよいように，こう決められている．

写像を合成するためには，別に σ, τ が全単射である必要はない．しかし，$\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_X$ が全単射ならば，その合成写像 $\sigma\tau$ も全単射になるので，$\sigma\tau \in \mathfrak{S}_X$ である．そこで，写像の合成を積と考えて $\mathfrak{S}_X$ が群になるかどうかを調べてみよう．

群の満たすべき公理は，結合律・単位元の存在・逆元の存在の 3 つだけであった．まず結合律であるが，これは一般の写像に対して成り立っているので，全単射についても明らかに成り立つ．一般の写像の合成に対する結合律については，巻末附録の補題 A.3 を参照してほしい．

次に単位元であるが，これは**恒等写像** id_X がその役割を果たす．ここで恒等写像というのは，任意の元 $x \in X$ に対して $\mathrm{id}_X(x) = x$ で決まる "何もしない" 写像のことである (附録 §A.1 参照)．写像の合成に対して $\sigma \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_X \circ \sigma = \sigma$ となることは，ほぼ明らかであろう．

最後に，逆元の存在を見ておこう．$\mathfrak{S}_X$ に属する写像 $\tau : X \to X$ が $\sigma : X \to$

---

17) 写像 $f : X \to Y$ が**全射**であるとは，f が X を Y 全体に移すときに言う．また f が**単射**であるとは，f が一対一の写像であるときに言う．全射かつ単射のとき，**全単射**という．詳しくは巻末の附録を参照してほしい．

X の逆元であるとは，積 $\sigma\tau$ および $\tau\sigma$ が単位元，つまり恒等写像 id_X に一致するということである．しかし，積は写像の合成であるから，これはまさしく τ が σ の**逆写像**であるということに他ならない．すべての写像が逆写像を持つわけではないが，ここで $\mathfrak{S}_X$ の定義に現れる『全単射』という性質が効いてくる．つまり，$\sigma \in \mathfrak{S}_X$ は全単射写像であり，附録の補題 A.4 によって，全単射であることと逆写像を持つという性質は同値であるから，確かに σ は逆写像を持つ．したがって，逆写像 σ^{-1} が，群における逆元 σ^{-1} になっている．逆写像と逆元では少々意味が異なるが，結局のところ両者は同じものなので，記号が同じでも問題は生じない．

以上で，$\mathfrak{S}_X$ は群であることが分かった．これを集合 X の**対称群**あるいは**置換群**と呼ぶ．

さて，一般の集合 X に対してその対称群を定義したが，具体的な数の集合

$$X = \{1, 2, \ldots, n\}$$

を考えた方がイメージしやすいであろう．そこで，以下しばらくの間 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ の場合に対称群を考えてみよう．記号を簡単にするために $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ と書く．また，対称群 $\mathfrak{S}_{[n]}$ を単に $\mathfrak{S}_n$ と表して，n **次対称群** と呼ぶ．

さて，n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元 σ は $[n]$ から $[n]$ への全単射であるが，それは $1, 2, \ldots, n$ の置換に他ならない (図 1.1).

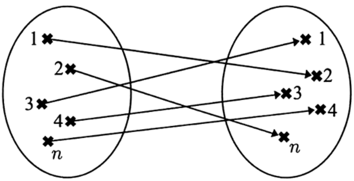


図 1.1　置換

σ は $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ を決めれば決まるので，これを

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

のように書くのが慣例である．このとき，上段の数字が下段の数字へと σ によっ

て写ることになるから，下の段は要するに $1,2,\dots,n$ の順列になっている．このことから，容易に $\mathfrak{S}_n$ の元の個数は $n!$ であることが分かるだろう．例えば，$n=3$ のときには $\mathfrak{S}_n$ に属する置換は次の $3!=6$ 個である．

$$\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,3\,2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,2\,1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,1\,3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,3\,1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,1\,2\end{pmatrix}.$$

最初の置換は $1,2,3$ を全く変えないので**恒等置換**と呼ばれ，記号で ε と表される．また，このような表示では，上段と下段の数字の対応のみが問題なので，上段の数字を $1,2,3,\dots$ と順番に並べておく必要性はない．例えば

$$\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,3\,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\,1\,3\\3\,1\,2\end{pmatrix} \quad \text{や} \quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,3\,1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\,2\,1\\1\,3\,2\end{pmatrix}$$

などと各列における上下の数字の対のみに注目して，その並べ方が異なっても同じ置換を表すと考えた方が便利である．

このように表示しておくと σ^{-1} を求めることも簡単である．一般の $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ をとり，これを式 (1.3) のように表しておく．すると逆元 σ^{-1} はこの表示の上段と下段の数字を入れ替えたものになっている．

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}\sigma(1)\;\sigma(2)\;\cdots\;\sigma(n)\\1\quad\;\; 2\quad\;\cdots\quad n\end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

このことは逆写像の定義から明らかであろう．

対称群 $\mathfrak{S}_n$ は数字 $1,2,\dots,n$ の間の “対称性” を表していると考えられる．というのも，それぞれの数字を好きなように置換することができるから，例えば置換によって不変な性質があれば，それは数字の対称性であると考えられるわけだ．例えば，$n=3$ として，3 変数の多項式

$$x_1+x_2+x_3,\quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1,\quad x_1x_2x_3$$

を考えると，これらは各変数 x_i の添え字 i をどのように置換しても変化しないから，対称な多項式であるという．

また，一見して対称でないようなものも，対称群によって特徴付けが可能である．例えば $\{1\}\subset[n]$ を考えてみよう．唯一つの元からなる部分集合 $\{1\}$ を任意に選んだ置換によって変換すると別の集合になってしまうので，集合 $\{1\}$ は明らかに対称でない．しかし，

$$H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) = 1\}$$

と置けば，H に属する置換で 1 を動かしても，その定義より 1 は変化しない! したがって，部分集合 $\{1\}$ はHに関して対称であるということができる．H は 1 を変えないので，1 を**不変にする**とか，1 を**固定する**という．

実は H は $\mathfrak{S}_n$ の部分群である (定義 1.5)．そこで H が部分群の満たすべき性質を持つことを確認してみよう．まず H は $\mathfrak{S}_n$ の積について閉じていなければならないが，それは次のようにして確かめることができる．$\sigma, \tau \in H$ とすると $\sigma(1) = \tau(1) = 1$ なので

$$\sigma \cdot \tau(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(1) = 1 \quad \therefore \sigma \cdot \tau \in H.$$

また，恒等置換はもちろん 1 を不変にするので H に属しており，したがって単位元は H に属している．最後に逆元について考えてみる．もし $\sigma \in H$ ならば，式 (1.4) において $\sigma(1) = 1$ なので

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

であって，$\sigma^{-1}(1) = 1$ だからやはり $\sigma^{-1} \in H$ である．つまり逆元は H に属する．以上で H が $\mathfrak{S}_n$ の部分群であることが確かめられた．H を $1 \in X$ の**固定部分群**と呼ぶ．

演習 1.9　$n = 3$ として，3 次の対称群 $\mathfrak{S}_3$ を考えよう．

(1) $\mathfrak{S}_3$ の各元の逆元を計算せよ．

(2) $\{1\}$ を固定する部分群は何になるか?

(3) $\mathfrak{S}_3$ の部分群をすべて書き出せ．

[ヒント] 単位群 $\{e\}$ および S_3 自身を含めて 6 個の部分群が存在する．

さて，$\{1\}$ を固定する部分群 H に話を戻し，どの数字を固定しているのかがよく分かるように，この部分群を以下 H_1 で表すことにする．部分群 H_1 がいったん決まると，H_1 によって固定される数字は $1, 2, \ldots, n$ の中で 1 のみである．つまり，部分群 H_1 は数字 1 を決定する．

同様にして，数字 2 を固定する部分群を H_2 と書き，数字 3 を固定するものを H_3, 一般に数字 k を固定する部分群を

$$H_k = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(k) = k\}$$

と書くことにする．このとき，部分群 H_2 は数字 2 を定め，H_3 は 3 を，そして一般に H_k は k を定めるから，$\mathfrak{S}_n$ の部分群として，もともと与えられていた数字の集合 $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$ の情報が織り込まれていることになる．単なる数字の集合だから,『幾何』という言葉を使うのはちょっと大げさだが，集合 $[n]$ の幾何を群 $\mathfrak{S}_n$ の部分群によって記述できるわけである．

幾何学をこのように群の中の構造としてとらえることは，実はなかなか強力だ．というのも，例えば，1 という唯一つの数字に対して，それに対応する部分群 H_1 は大きな対称性を持つ群である．容易に分かるように，1 を固定するような置換の全体は $\{2,3,\ldots,n\}$ の置換群であり，それは $(n-1)$ 次の対称群 $\mathfrak{S}_{n-1}$ と本質的に同じものである．したがって『群の言葉で 1 を考えることは $\{2,3,\ldots,n\}$ の対称性を考えることである』とも言える．

また，唯一つの数字 1 だけでなく，2 つの数字 $\{1,2\}$ を不変にするような群 $H_{\{1,2\}}$ を考えてみよう．この不変性の解釈はいろいろあり得るが，ここでは

$$H_{\{1,2\}}=\{\sigma\in\mathfrak{S}_n\mid\sigma(1)=1,\sigma(2)=2\}$$

と考えることにする．やはり $H_{\{1,2\}}$ は部分集合 $\{1,2\}$ を決めてしまうが，包含関係 $\{1\}\subset\{1,2\}$ より，固定部分群の包含関係 $H_1\supset H_{\{1,2\}}$ が従う．また $H_{\{1,2\}}=H_1\cap H_2$ でもある．このように，部分群の間の関係が，点の配置に関する情報をすべて持っているわけである．

演習 1.10　$H_{\{1,2\}}=\mathfrak{S}_{\{3,\ldots,n\}}$ であることを示せ．また $K_{\{1,2\}}=\{\sigma\in\mathfrak{S}_n\mid\sigma(\{1,2\})=\{1,2\}\}$ と置くと $H_{\{1,2\}}\subset K_{\{1,2\}}$ であるが，$H_{\{1,2\}}$ と $K_{\{1,2\}}$ は何が異なるか考えてみよ[18]．

1.4　図形の対称性と群

前節では集合 X の対称群 $\mathfrak{S}_X$ を考えた．これは X から X 自身への全単射の全体であったが，X が何らかの幾何学的構造を持つ場合，X からそれ自身への幾何構造を保つような写像を**変換**と呼ぶことが多い．

例えば，平面 $\mathbb{R}^2$ はいわゆる初等幾何学の舞台であり，いろいろな幾何学的性

[18] 部分集合 $A\subset\{1,2,\ldots,n\}$ に対して $\sigma(A)=\{\sigma(a)\mid a\in A\}$ と定義する．つまり $\sigma(A)$ は A の各元をすべて σ で写し，それを寄せ集めた集合である．

質を持っている．その代表的なものが "距離" である．平面上の 2 点 (a,b) と (c,d) の間の距離は

$$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

で与えられるが，このように平面 $\mathbb{R}^2$ に距離を考えたものを**ユークリッド平面**と呼ぶ[19]．上で紹介した語法によると，ユークリッド平面からそれ自身への写像を平面上の変換と呼ぶわけであるが，なかでも，平面上の距離を変えないような変換を**合同変換**(あるいは**等長変換**) と呼ぶ (図 1.2).

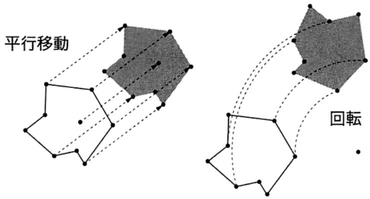


図 **1.2** 合同変換 (平行移動と回転)

例えば，**平行移動**や，ある点を中心とする**回転移動**，ある直線に関する**線対称移動**などが合同変換の例である．線対称移動はしばしば**鏡映**とも呼ばれ，線対称の軸になる直線を鏡映の**軸**と呼ぶ (図 1.3)．たしかに線対称で移りあう図形は，線対称の軸上に鏡を置いてその像を見るかのように左右が逆転している (あるいは上下というべきかもしれないが)．鏡映は 3 次元以上の空間でも定義できるので，本書では線対称のかわりに鏡映という語を用いることが多い．

さて，このような合同変換の全体は群をなし，**合同変換群**あるいは**ユークリッド運動群**と呼ばれる．このことは自明とは言えないが，章を改めてゆっくり解説することにし，ここでは簡単な図形の "対称群" を調べてみよう．

---

19) Euclid (前 4 世紀–前 3 世紀)．アレキサンドリアのムゼイオンに所属した数学者の一人．全 13 巻からなる『原論』("Stoicheia") はギリシア数学の成果を集大成し，公理・公準に基づいた理論的な体系をなす著作で，平面幾何 (1 ～ 6 巻)，数論 (7 ～ 10 巻)，および立体幾何 (11 ～ 13 巻) を扱う．幾何だけでなく，素数の性質やユークリッドの互除法など代数的な記述もある．

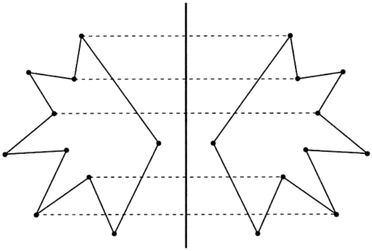


図 1.3 鏡映

1.4.1 2面体群

平面上に描かれた図形 X を保つような合同変換の全体はユークリッド運動群の部分群をなすが，これを図形 X の**対称群**と呼ぶ．ここで図形を保つとか保存するというのは，ある図形を変換した結果，元の頂点や辺などは別の場所に移ったりしていても図形全体としてはピッタリ重なりあうということを意味している．例えば正 3 角形はその重心の回りに $2\pi/3$ 回転しても，頂点は動くものの図形全体としては保存されている．このような意味で図形 X を保存するような合同変換 2 つの積 (写像の合成) がまた X を保つことは明らかであろう．また，ある合同変換が X を保てば，その逆変換も X を保つ．これは標語的には次のように書ける．

$$\text{変換 } T \text{ に対して} \quad T(X) = X \Longleftrightarrow X = T^{-1}(X).$$

第一式の両辺に T^{-1} を掛けてみれば第二の式が得られるし，第二式の両辺に T を掛けると第一式が得られる．もちろん恒等写像 (単位元) はすべての図形を保つから対称群に属している．積が定義され，積は写像の合成であるから結合律を満たす．さらに，単位元が存在して，各元が逆元を持つから，このような，ある図形 X を保存する合同変換の全体は，群の公理をすべて満足している．

例えば X として，原点を中心とする正 n 角形を考えてみよう．正 n 角形の対称群は n 次の**2面体群**と呼ばれ，通常 D_n と表される． この場合，原点は図形の重心なので，2 面体群に属する変換は原点を動かさない．このようなとき，原点は 2 面体群によって**不変である**，または，原点は 2 面体群の**固定点**である，と言う．平行移動は原点を必ず動かすから，2 面体群は平行移動を含まない．で

はどのような合同変換が 2 面体群 D_n に属するのだろうか?

原点を中心とする角度 $2\pi/n$ の回転を a とすれば，明らかに a は正 n 角形を図形として保つので，$a \in D_n$ である．もちろん，この回転を何回か行ったものもまた正 n 角形を保つから，そのような回転はすべて D_n に属する．変換を引き続き行うことが合同変換群における積にあたるので，回転 a を k 回繰り返すことは a^k と表されるであろう．これは原点中心，角度が $2\pi k/n$ の回転に他ならない (図 1.4).

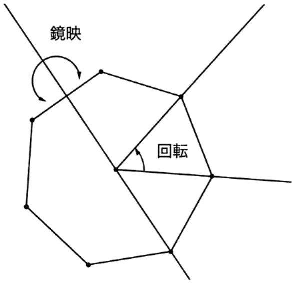


図 1.4　2 面体群

2 面体群は正 n 角形を保つのであるから，2 面体群に属する合同変換はある頂点を他の頂点に，またある辺の中点を他の辺の中点に移すような変換でなければならない．この考え方を回転移動に適用してみると，次のことが分かる．

補題 1.11　2 面体群 D_n に属する回転移動は $\{a^k \mid 0 \leq k < n\}$ で尽くされる．ただし a^0 は恒等変換 (角度 0 の回転移動) を表す．

証明　$f \in D_n$ が回転移動であったとする．さらに f は恒等変換ではないとしよう．2 面体群の元は原点を固定するから，もちろん f も原点を固定する．恒等変換ではない回転の固定点は回転の中心に他ならないから，f は原点を中心とする回転移動である．一方，f によって正 n 角形のある頂点は他の頂点に移らなければならないので，その回転角は $2\pi/n$ の整数倍でなければならない．したがってそれは a^k $(k \in \mathbb{Z})$ の形をしている．a^n は回転角が 2π の回転であるが，これは平面上の合同変換としては恒等変換に一致する．一般に $a^{k+n} = a^k$ であるから，回転移動として $a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ を考えれば十分である．　■

さて，正 n 角形のある頂点を 1 つ取り，その頂点と原点を結ぶ直線を軸とする鏡映を b としよう．この b も明らかに正 n 角形を保つから，2 面体群の元である．頂点の取り方は n 通りあるが，n が偶数か奇数かによって軸の本数は異なる (図 1.5).

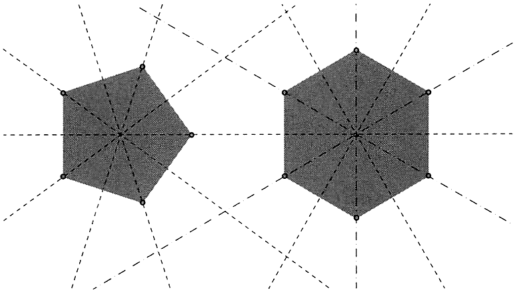


図 1.5 鏡映の軸

他にも，各辺の中点と原点を結ぶ直線を軸とする鏡映もまた 2 面体群に属している．この場合も n が偶数か奇数かによって事情は異なり，もし n が奇数ならば，辺の中点と原点を結ぶ直線は，辺と相対する頂点を通る．n が偶数ならば，中点と原点を結ぶ直線は頂点を通らず，相対する辺の中点を通ることになる．しかし，n が偶数であるにせよ，奇数であるにせよ，いずれの場合にも D_n に属する鏡映はちょうど n 種類存在することが分かる．

これらの鏡映は，実は回転 a と，先に 1 つ固定した鏡映 b との組合せで書くことができる．例えば ab が何を表すのかを少し考えてみよう．積 ab は，まず鏡映 b で移動して，その後 a によって回転することを意味する．積は写像の合成なので，順序は右から左に読むことに注意しよう．

さて，b の軸を決めるためにとった頂点を P_0, それを時計回りに $2\pi/n$ 回転した頂点を P_{-1}, 反時計回りに回転した頂点を P_1 と表し，同じように，辺 P_0P_1 の中点を Q_1, 辺 P_0P_{-1} の中点を Q_{-1} と書こう (図 1.6 参照)．すると明らかに

$$b(P_1) = P_{-1}, \qquad b(Q_1) = Q_{-1},$$

$$a(P_i) = P_{i+1} \quad (i = -1, 0), \qquad a(Q_{-1}) = Q_1$$

などが成り立っている．これを使うと

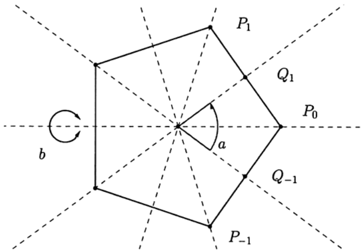


図 1.6

$$ab(Q_1) = a(Q_{-1}) = Q_1$$

が分かり，Q_1 は ab の固定点である．原点はもちろん固定点であるから，ab は原点と Q_1 を結ぶ直線上の点を全く動かさない．このことと ab が恒等変換ではないことから ab はこの直線を軸とする鏡映であることが結論できる．

演習 1.12　合同変換 f がある直線上の点を全く動かさないとき，f は恒等変換であるか，またはその直線を軸とする鏡映であることを示せ．

同様に考えてゆくと，結局 $b, ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b$ はすべて鏡映であって，しかも互いに相異なることが分かる．これらが，2 面体群に属する鏡映をすべて与えている．

定理 1.13　D_n の任意の元は a, b の積で書き表すことができる．具体的には

$$D_n = \{a^k, a^k b \mid 0 \leq k \leq n-1\}$$

であって，n 次の 2 面体群は $2n$ 個の元からなる群である．

証明　合同変換は，平面上の 3 点の行先で決まってしまうことが，後に一般論で示される (補題 4.9 とその後の注意参照)．いまはこの事実を認めて証明を行う．

2 面体群 D_n の元 g は既に注意したように原点を固定する．さらに各頂点は，またいずれかの頂点に移らなければならない．合同変換が 3 点の像で決まることを認めると g はある 2 つの頂点がどの頂点に移るかという情報だけで決まる (頂点の個数はもちろん 2 個以上ある!)．いま，頂点 P_0 が g によってある頂点 P_j に移ったとすると，隣の頂点 P_1 はやはり P_j の隣の頂点に移らなければなら

ない．P_j に隣り合う頂点は 2 つあるから，可能性としては二通りが考えられるが，そのどちらもが上にあげた回転，または鏡映で実現されることは明らかである．このようにして (原点を含む) 3 点の行先が回転または鏡映で実現されてしまうので，結局 D_n の元は定理の主張にある $2n$ 個の元で尽くされている．■

定理の主張の本質は，D_n の任意の元がたった 2 個の元 a, b のいくつかの積で書けてしまう，という部分にある．このようなとき，D_n は $\{a,b\}$ によって**生成される**といい，$\{a,b\}$ を**生成元**あるいは**生成系**という．また a, b は

$$a^n = b^2 = abab = e \tag{1.5}$$

という関係式を満たしているが，a, b の間の任意の関係式はこれらの関係式に還元されることが証明できる．そこで，D_n を生成元 $\{a,b\}$ とその**関係式**(1.5) によって決まる群であるという．

演習 1.14　上にあげた関係式 $abab = e$ を確かめよ．これより $ba = a^{-1}b^{-1} = a^{n-1}b$ であることが結論される．

演習 1.15　正 3 角形の対称群は，各頂点に 1, 2, 3 の数字を付すことによって 1, 2, 3 の置換を引き起こす．頂点の置換によって対称群の元は決まってしまうことに注意しよう．このようにして D_3 と $\mathfrak{S}_3$ は本質的に同じものであることを示せ．また D_4 と $\mathfrak{S}_4$ は同じものとみなせるだろうか？

1.4.2　正多面体群

対称群を考えるための図形は空間図形でも構わない．ここでは簡単のために原点を中心とする正多面体を考えよう．**正多面体**とは，各面が合同な正多角形であるような凸多面体であって，各頂点の周りに同数の面が集まっているようなものをいう．

演習 1.16　凸多面体であって，次の条件を満たすような例をあげよ．

(1) 各面は合同な多角形であるが，正多角形ではないような例．

(2) 各面はすべて正多角形であるが，合同ではない何種類かの正多角形が混在している例．

(3) 各面は合同な正多角形だが，頂点の周りの面の数が一定でないような例．

正多面体は相似を除いて 5 種類しかないことが古くギリシャの数学の時代にプラトンによって証明されている[20]．それらは $n = 4, 6, 8, 12, 20$ の正 n 面体である．数字 n は面の総数を表すが，各正多面体の諸量を下記に表としてあげておく．

表 1.1 正多面体の諸量

	各面の形状	頂点の数	稜の数	面の数	頂点に集まる面数
正 4 面体	正 3 角形	4	6	4	3
正 6 面体	正 4 角形	8	12	6	3
正 8 面体	正 3 角形	6	12	8	4
正 12 面体	正 5 角形	20	30	12	3
正 20 面体	正 3 角形	12	30	20	5

[注] 数量的な比較がしやすいように，正方形を正 4 角形と書いた．

演習 1.17 正多面体の面の数を $f = n$, 稜の数を e, 頂点の数を v とすると，それらは**オイラーの関係式** $f - e + v = 2$ を満たしていることを確かめよ．

これら 5 種類の正 n 面体を保存するような空間内の回転および鏡映 (= 平面に関する面対称移動) の全体を**正 n 面体群**，あるいは単に**正多面体群**と呼ぶ．ただし流儀によっては，回転のみを考え鏡映は考えないこともある．

回転および鏡映からなる正 n 面体群を G と書き，そのうち，回転のみからなる部分群を G^+ で表そう．また，有限集合 A に対して A に属する元の個数を $\#A$ で表す．次の定理によって，正多面体群 G の位数 $\#G$ が分かる．

定理 1.18 正多面体の各面が正 p 角形であったとすると，正多面体群 G の位数は $\#G = 2fp = 4e$ で与えられる．ただし f は正多面体の面の数，e は稜の数を表す．

また，回転のみからなる部分群 G^+ の位数は G の位数のちょうど半分である．つまり $\#G^+ = fp = 2e$ が成り立つ．

証明 多面体に対して，その面の全体を $\mathfrak{F} = \{F_1, \ldots, F_f\}$, 稜を $\mathfrak{E} = \{E_1, \ldots, E_e\}$, 頂点を $\mathfrak{V} = \{V_1, \ldots, V_v\}$ と表そう．このとき，面・稜・頂点からなる**旗**とは，$V_i \subset E_j \subset F_k$ となっているような組 (V_i, E_j, F_k) を指す．旗の全体を

[20] Platon (前 428?–前 347)．正多面体のことを**プラトン多面体**とも呼ぶ．正多面体が 5 種類しかないことの証明は，例えば [43], [44] 等を参照されたい．

$$\mathfrak{Flag} = \{X = (V_i, E_j, F_k) \in \mathfrak{V} \times \mathfrak{E} \times \mathfrak{F} \mid V_i \subset E_j \subset F_k\}$$

で表そう．

G の元はある面とそれに属する辺，その辺に属する頂点を指定したとき，それをどこに写すかという情報によって完全に決まることを示そう．つまり，ある旗 X_0 を選んで固定したとき，G の元は，X_0 をどの旗に移すかという情報で決まるということである．実際，空間内の合同変換は相異なる 4 点の像で決まる[21)]のだが，その 4 点として，正多面体の重心，最初に選んだ旗 $X_0 = (V^0, E^0, F^0)$ の面 F^0 の重心，稜 E^0 の重心 (中点)，そして頂点 V^0 の像を取ってくることができる (図 1.7).

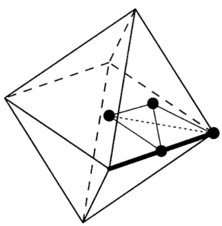


図 **1.7**　旗と 4 つの重心

さて，G の元と旗が一対一に対応することを見るには，固定された旗 $X_0 = (V^0, E^0, F^0)$ を任意の旗 $X = (V, E, F) \in \mathfrak{Flag}$ に移すような，対称群に属する合同変換を構成する必要がある．そのため，まず多面体の重心を通る軸に関する回転移動によって，面 F^0 の重心を面 F の重心に移す．その後，多面体の重心と移された面の重心を通る軸に関する回転移動によって面同士をピッタリと重ね，さらに稜 E^0 も E に重ねてしまう．このとき，稜に属する頂点は 2 つあるので，そのどちらに V^0 が移っているかは分からない．もし V^0 が V に移っていなければ，多面体の重心と面 F の重心，そして稜 E の中点を通る平面に関する鏡映を行うと V^0 は最終的に V に移ることになる (図 1.8).

以上で G の元は $\mathfrak{Flag}$ の元と一対一に対応することが分かった．では，旗はいったい何個あるのだろうか? それを数えるのはそれほど難しくない．まず，面

21) 正確には，どの 3 点も同一直線上にない，同一平面に含まれていない 4 点の像．これは 4 点がある三角錐の頂点になっているという条件と同値である．詳しくは演習 5.1 参照.

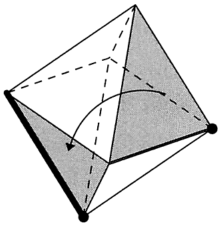


図 1.8 旗を重ねる

の選び方は f 通り，面を選んだときにそれに属する稜の選び方は p 通り，そして最後に頂点の選び方は稜の端点として 2 通りある．したがって $\#\mathcal{F}\ell ag = f \cdot p \cdot 2$ である．

上の議論で鏡映が使えないとすると，旗に属する稜の端点が 2 点あって，これらは多面体，面，および稜を保存するような回転では移りあわない[22]ので，$\mathcal{F}\ell ag$ の元のうち，稜の端点だけが異なる 2 つの旗はそのうちの 1 つしか X_0 から移ってこない．これは G^+ の元の個数が G の半分であることを示している．■

この定理の証明をよく見ると，旗 $X \in \mathcal{F}\ell ag$ と対称群 G の元がまさしく一対一に対応していることが分かる．ある 1 つの面を含む旗に対応する G の元はその面の重心を固定するような合同変換の全体であり，その個数はちょうど $2p$ 個ある．同じようにある稜を含む旗に対応する合同変換や，ある頂点を固定する合同変換もこの対応から読み取ることができる．このように旗の構造を対称群 G へと写すことによって，まさしく G は正多面体そのものの幾何的構造を代数的に反映したものであると解釈できる．

演習 1.19　ある稜 E を固定するような G の元全体のなす部分群を G_E と書くとき，$\#G_E$ を求めよ．また，ある頂点 V を固定する部分群 G_V ではどうか?

正多面体群は面白い対象だが，良書が多数あるので，ここではこれ以上立ち入らないことにする．興味を持った読者は，例えば参考文献 [22], [45], [50] などを参照してほしい．

---

22) 多面体の重心，面の重心，稜の中点を含む平面を固定するような回転は恒等変換しか存在しない．

1.5　群拾遺

既に紹介した群に加えてまだまだたくさんの群がある．もちろんそのすべてを紹介するわけにはいかないが，代表的なものをいくつか簡単に見ておこう．

1.5.1　自由群

a, b を文字とするとき a, a^{-1}, b, b^{-1} を任意の順序で並べたものを**語**と呼ぶ．ただし，何も並んでいないものも考えてそれを e と書き，**空語**と呼ぶ．e は，“そこに何もない” ということを表す記号にしか過ぎないから，例えば aeb と ab は同じ語を表すし，$eb^{-1}e = b^{-1}$ や $ee = e$ などが成り立つ．また $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$ のように $a^{\pm 1}$ や $b^{\pm 1}$ が連続して並んでいるものはその部分を省いて考える．例えば

$$aaa^{-1}ba^{-1}bb^{-1} = aba^{-1}bb^{-1} = aba^{-1}$$

のように．このように省いていって最終的に何も残らなければ，それは空語 e と解釈する．だから $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ である．

さて，このような語の全体を F_2 と書いて，2 つの語の積を，語を続けて並べることと決めよう．するとこの積によって F_2 は群になる．もちろん単位元は e であって，逆元は語を逆向きに並べたあと各項を $a \leftrightarrow a^{-1}, b \leftrightarrow b^{-1}$ のように互いに入れ替えたものである．例えば

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \quad (ba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1},$$

$$(aab^{-1}a^{-1}b^{-1}b^{-1}abb)^{-1} = b^{-1}b^{-1}a^{-1}bbaba^{-1}a^{-1}$$

などである．F_2 を a, b によって生成された**自由群**と呼ぶ．

演習 1.20　F_2 において，上のように決めた単位元・逆元が実際に群の単位元および逆元になっていることを確かめよ．

2 面体群 D_n では，生成元 $\{a,b\}$ の間に関係式 $a^n = e, b^2 = e, abab = e$ が成り立つのであった．自由群はこのような関係式を一切持たない普遍的な群である．

もちろん，生成元を 2 個ではなく，3 個，4 個，... と増やしていくこともでき，一般に k 個の生成元を持つような自由群を F_k と書く．

1.5.2 行列群

行列のなす群も考えられる．逆行列を持つような正方行列を**正則行列**と呼ぶが，n 次正則行列全体のなす群を**一般線型群**と呼び，GL_n と表す．行列の成分が複素数のときには $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，実数ならば $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ などと書く． 成分が n 次の正方行列全体を $M_n(\mathbb{C})$ で表すと

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{g \in M_n(\mathbb{C}) \mid g \text{ は正則行列 }\} = \{g \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det g \neq 0\}$$

である．ただし $\det g$ は g の**行列式**を表す[23)]．GL_n は多数の部分群を持ち，例えば次のような部分群が数学の最先端の研究においても活躍している．

$$\begin{aligned}
\mathrm{SL}_n &= \{g \in \mathrm{GL}_n \mid \det g = 1\} \quad (\text{特殊線型群}),\\
\mathrm{O}_n &= \{g \in \mathrm{GL}_n \mid {}^t g g = 1_n\} \quad (\text{直交群}),\\
\mathrm{U}_n &= \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t \overline{g} g = 1_n\} \quad (\text{ユニタリ群}),\\
\mathrm{Sp}_{2n} &= \{g \in \mathrm{GL}_{2n} \mid {}^t g J_n g = J_n\} \quad (\text{シンプレクティック群}).
\end{aligned}$$

ただし 1_n は単位行列を表し，$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$ である．また，${}^t g$ は g の**転置行列**を表す記号で，行列 g を対角線を軸にして対称に成分を入れ替えて得られる行列である．転置によって行列の行は列に，列は行へと入れ替わる．例えば，実直交群 $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ についてこれを見てみると，

$$g = \begin{pmatrix} a & p & u \\ b & q & v \\ c & r & w \end{pmatrix} \quad \text{に対して} \quad {}^t g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

である．したがって ${}^t g g = 1_3$ は

---

23) 行列式について聞いたことがない読者もいるかもしれない．
例えば 2 次の行列式は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ と計算される．これはベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ を 2 辺とする平行四辺形の符号付きの面積になっている．3 次の行列 g であれば，その列ベクトル (空間ベクトル) を u, v, w と書いて $g = (u, v, w)$ と表しておく．すると 3 次の行列式 $\det g$ は，u, v, w を 3 辺とする平行 6 面体の符号付き体積である．したがって $\det g \neq 0$ はこの 3 つのベクトルが平行 6 面体が潰れないように“独立”な方向を向いていることを意味している．一般に n 次の行列式も同様に考えることができるが，そのときには n 次元空間内の平行 $2n$ 面体を考えねばならない! 幾何学的な直観はしばしば有効であるが，n 次元空間を想像するのはなかなか難しい．したがって n 次の行列式は 2 次の行列式 $ad - bc$ のように式を用いて書くのが便利である．このように一般化された行列式の定義については，例えば [31], [41] 等の教科書を参照してほしい．

$$
{}^t g g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & p & u \\ b & q & v \\ c & r & w \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & ap+bq+cr & au+bv+cw \\ pa+qb+rc & p^2+q^2+r^2 & pu+qv+rw \\ ua+vb+wc & up+vq+wr & u^2+v^2+w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

を意味しており，これは g の各列ベクトルの長さが 1 であって，相異なる 2 つの列ベクトルはすべて直交していることを表している．またアインシュタインの相対性理論には次の群が重要な役割を果たした[24)].

$$
\mathrm{SO}(3,1) = \{g \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{R}) \mid {}^t g I_{3,1} g = I_{3,1}\}, \quad I_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.
$$

これをド・シッター群と呼ぶ[25)](不定値直交群の一種である).

演習 1.21 一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の中で，**上半三角行列**，つまり対角線より下の成分はすべてゼロであるような行列全体のなす部分集合を B_n と書く．このとき B_n は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の部分群であることを示せ.

1.5.3 変換群

X を集合とする．通常 X は何らかの「構造」を持っているものを考えることが多い．例えば X として，平面や曲面，ベクトル空間とか多様体，行列の全体，一階微分可能な関数たち，微分方程式の解の全体や多項式の空間などを考えてみてほしい．X として群 G を考えてみるのもよいだろう．あるいは，もっと進んだ知識を持っている人は，複素多様体やリーマン面，射影多様体，リー環や多項式環，有理数の拡大体などを思い浮かべていただくとしよう.

定義 1.22 X 上の**変換**とは X からそれ自身への全単射写像 $f: X \to X$ のことである．X が何らかの構造を持っているときには，単なる全単射ではなく f および逆写像 f^{-1} がその構造を保つようなものを考える.

例えば $X = [n]$ として，これを単に集合とみなせば X 上の変換は $1, 2, \ldots, n$ の置換である．これは，つまり §1.3 で論じた n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ に他ならない.

---

24) Einstein, Albert (1879–1955).

25) De Sitter, Willem (1872–1934). オランダの天文学者.

また $X = \mathbb{C}^n$ (n 次元複素数ベクトル空間) とすると，X 上の変換として X のベクトル空間としての構造を保つようなものを考えることになる．ベクトル空間の構造とはつまり，和とスカラー倍，あるいは一次結合といってもよいが，そのような演算ができることであり，この "変換" は当然のことながら一次結合を保たなければならない．式で書くと

$$f(\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

となる．このような変換 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を**線型変換**と呼ぶ．したがって $X = \mathbb{C}^n$ の数ベクトル空間としての変換は線型変換の全体となり，それは，行列によって表示することで一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ と一致することが分かる．

ところで，同じ $X = \mathbb{C}^n$ であっても，ベクトル空間として考えるのではなく単なる可微分多様体と見るのであれば，X の変換とは微分同相写像に他ならない．

定理 1.23　X 上の変換の全体を $\mathrm{Aut}(X)$ と表すと，$\mathrm{Aut}(X)$ は写像の合成を積として群となる．これを X の**変換群**，あるいは**自己同型群**と呼ぶ．

証明　2 つの全単射写像の合成はまた全単射であって，写像の合成については結合律が成り立つ．また**恒等写像** $\mathrm{id}_X(x) = x$ ($x \in X$) が乗法の単位元であり，逆写像が逆元である．∎

1.5.4　一次分数変換

複素平面 $\mathbb{C}$ のうち実軸より上の半平面を**上半平面**という．$z \in \mathbb{C}$ の実部を $\mathrm{Re}\, z$, 虚部を $\mathrm{Im}\, z$ と書くことにすれば，上半平面は $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ と表すことができる (図 1.9)．記号 $\mathfrak{H}$ はドイツ花文字で H を表している[26]．

$\mathfrak{H}$ は $\mathbb{C}$ の開集合として自然に複素多様体であるが，複素解析的な構造を保つ $\mathfrak{H}$ 上の変換 (自己同型) の全体は，実特殊線型群

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{R}, \det g = ad - bc = 1 \right\}$$

とみなすことができる (下記，命題 1.24 の注意を参照)．特殊線型群の元 $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対応する $\mathfrak{H}$ 上の変換は

[26] 上半平面はドイツ語では "Obere Halbebene" と書くが，単に Halbebene ということも多いようである．その頭文字を取ったものであろう．

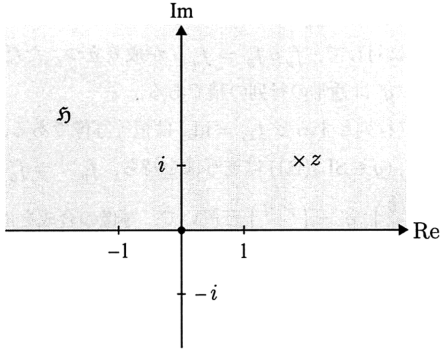


図 1.9 複素平面と上半平面

$$f_g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \mathfrak{H},\ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

のように表される．これを**一次分数変換**と呼ぶ．この一次分数変換が実際に $\mathfrak{H}$ 上の変換であることを以下示そう．

上半平面上の点 $z \in \mathfrak{H}$ に対して，$f_g(z) \in \mathfrak{H}$ が成り立つことを見よう．最初に，$f_g(z)$ の分母は $z \notin \mathbb{R}$ であるからゼロではないことに注意する．そこで，$\operatorname{Im} f_g(z) > 0$ であることを示そう．一般に複素数 w の虚部が $\dfrac{w - \overline{w}}{2i}$ で与えられることに注意して次のように計算する．

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f_g(z) &= \frac{1}{2i}(f_g(z) - \overline{f_g(z)}) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \overline{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\frac{(az+b)(c\overline{z}+d) - (a\overline{z}+b)(cz+d)}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{z - \overline{z}}{2i} \cdot \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} > 0.
\end{aligned}$$

これより $f_g(z) \in \mathfrak{H}$ である．最後に $f_g : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ が全単射であることを示そう．それには f_g が逆写像を持つことを示せば十分であるが，もっと一般に次の命題を示す．

命題 1.24 一次分数変換 f_g に対して，次が成立する．

(1) $g, g' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対して，$f_g \circ f_{g'} = f_{g\cdot g'}$ が成り立つ．ただし $f_g \circ f_{g'}$ は写像の合成を表し，$g \cdot g'$ は通常の行列の積である．

(2) 1_2 を 2 次の単位行列とすると $f_{1_2} = \mathrm{id}_{\mathfrak{H}}$ は恒等写像である．

(3) 一次分数変換 f_g $(g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ は逆写像を持ち，${f_g}^{-1} = f_{g^{-1}}$ が成り立つ．

証明 (1) $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $g' = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ と置いて，写像の合成を計算すると，

$$
\begin{aligned}
f_g \circ f_{g'}(z) = f_g(f_{g'}(z)) &= \left(a\frac{pz+q}{rz+s} + b\right)\left(c\frac{pz+q}{rz+s} + d\right)^{-1} \\
&= \Big(a(pz+q) + b(rz+s)\Big)\Big(c(pz+q) + d(rz+s)\Big)^{-1} \\
&= \Big((ap+br)z + (aq+bs)\Big)\Big((cp+dr)z + (cq+ds)\Big)^{-1} \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

であるが，行列の積の方は

$$
gg' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}
$$

だから，(1.6) 式は $f_{gg'}(z)$ に一致する．

(2) $f_{1_2}(z) = z$ が成り立つことは一次分数変換の定義から明らかであろう．

(3) まず (1) より $f_g \circ f_{g^{-1}} = f_{gg^{-1}} = f_{1_2}$ だが，(2) よりこれは恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathfrak{H}}$ に等しい．つまり ${f_g}^{-1} = f_{g^{-1}}$ である． ∎

この命題は，少し難しく言い換えると，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \ni g \mapsto f_g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{H})$ が群の演算を保つということを主張している．実際には，この対応は一対一でない．というのも $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対して $\pm g$ は同じ一次分数変換を表すからである．そこで $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の元のうち $\pm g$ を同一視したものを $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ で表し，**射影特殊線型群**と呼ぶ．

射影特殊線型群 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ は上半平面の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{H})$ と一対一に対応するのであるが，一次分数変換が実際に $\mathfrak{H}$ 上の複素構造を保つような変換全体であることを確かめるには複素関数論の知識が必要であって，そう容易ではない．興味のある読者は [46], [36] をご覧いただきたい．

演習 1.25 $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ および $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の元とする．このとき対応する一次変換が何になるかを考えてみよ．

第2章　正多面体群と方程式

駆け足ではあったが，前章ではさまざまな群の例を紹介した．いままであまり群とは馴染みのなかった人も，群とは何か，というおおよその感覚はつかめたと思う．そこで正多面体群を例に取り，群が数学の問題においてどのような役割を果たしているのか見てみることにしよう．

2.1　3次方程式

2次方程式の解の公式は古代バビロニアの時代 (前20世紀–前15世紀頃) から知られていたらしい．具体的な方程式の場合ではあるが，粘土板に記された楔形文字にその解法のアルゴリズムが記されているという[1)]．念のためその解の公式をここにまとめておこう．

$$x^2 + Ax + B = 0 \text{ の 2 根は } x = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2},$$

$$x^2 + Ax + B = 0 \text{ の 2 根を } x = \alpha, \beta \text{ とすれば } \begin{cases} -A = \alpha + \beta \\ B = \alpha\beta. \end{cases}$$

しかし2次方程式に比して，一般の3次方程式の解法が発見されたのはルネッサンス，ようやく16世紀も半ばになってからのことで，実に3000年以上の星霜を要した．3次方程式を解くには本質的な困難が伴うのである．

一般の3次方程式

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \tag{2.1}$$

を考えてみよう．この3つの根を α, β, γ とすると**根と係数の関係**

1) [53, p.45] 参照.

$$\begin{cases} -A = \alpha+\beta+\gamma \\ \ \ B = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \\ -C = \alpha\beta\gamma \end{cases}$$

が成り立つ．この公式の右辺に現れる式は 3 根 α, β, γ を任意に置換しても変わらない．このような式を**対称式**と呼ぶが，その中でこの 3 つの対称式を特に**基本対称式**と呼び，順に e_1, e_2, e_3 で表す．

$$\begin{cases} e_1 = \alpha+\beta+\gamma \\ e_2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \\ e_3 = \alpha\beta\gamma \end{cases}$$

基本対称式と呼ばれる理由は次の定理による．

定理 2.1 (**対称式の基本定理**)　任意の対称式は基本対称式の多項式として**唯一通り**に書ける．

証明　証明はそう難しいわけではないが，本書では割愛する．例えば [34, 定理 5.1] を参照されたい．　■

演習 2.2　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ および $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ を基本対称式の多項式として表せ．

いささか唐突ではあるが，$\omega = e^{2\pi i/3} = (-1+\sqrt{3}\,i)/2$ を 1 の原始 3 乗根として，r, s, t を次のように置こう．

$$\begin{aligned} r &= \alpha+\beta+\gamma, \\ s &= \alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma, \\ t &= \alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma. \end{aligned}$$

このように置いておくと，α, β, γ を求めることと r, s, t を求めることは実は同じことになる．実際，$\omega^3 = 1$ 等を用いると次が成り立つことが確かめられる．

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{3}(r+s+t), \\ \beta &= \frac{1}{3}(r+\omega^2 s+\omega t), \qquad (2.2) \\ \gamma &= \frac{1}{3}(r+\omega s+\omega^2 t). \end{aligned}$$

根と係数の関係より $r = e_1 = -A$ は既に求まっているから，結局は s, t を求め

れば 3 次方程式が解けることになる．

群の考え方を応用するために α, β, γ を原点を重心とする正 3 角形の各頂点にラベルとして配置し，3 次の 2 面体群 D_3 で α, β, γ を移動させてみよう[2)] (図 2.1)．まず原点中心の 120° の回転を考え，これによって α, β, γ を写すと s, t がどう変化するかを見てみる．120° 回転によって α が β に，β が γ に，そして γ が α に変化するので s, t は

$$s = \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma \longrightarrow \beta + \omega\gamma + \omega^2\alpha = \omega^2 s,$$

$$t = \alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma \longrightarrow \beta + \omega^2\gamma + \omega\alpha = \omega t$$

と写る．次に，例えば頂点 α を固定するような鏡映によって s, t がどう変化す

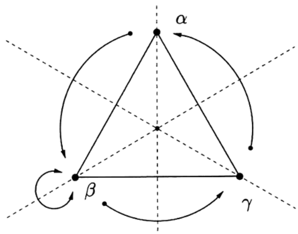


図 2.1　根の 3 角形

るかを見てみると

$$s = \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma \longrightarrow \alpha + \omega\gamma + \omega^2\beta = t,$$

$$t = \alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma \longrightarrow \alpha + \omega^2\gamma + \omega\beta = s$$

である．したがって s^3, t^3 は 120° 回転では変化せず，鏡映では s と t が入れ替わる．そこで

$$p = s^3 + t^3, \quad q = s^3 t^3$$

と置くと，これらは回転および鏡映で不変である．2 面体群が回転と鏡映で生成されていたことを思い出すと，結局 p, q は 2 面体群の任意の元によって不変

2) D_3 と 3 次の対称群 $\mathfrak{S}_3$ は同型であるが，ここではイメージが湧きやすいように図形の力を借りて 2 面体群とする．しかし，一般の n 次方程式を考えるときには 2 面体群ではなく対称群と捉えるのが正しい．

であり，したがって α, β, γ の対称式であることが分かる．これは p, q が方程式の係数である基本対称式 $e_1 = -A, e_2 = B, e_3 = -C$ を用いて書けることを意味している．一方 s^3, t^3 は 2 次方程式 $x^2 - px + q = 0$ の二根であるから s^3, t^3 も A, B, C を用いて表すことができる．これから s, t は s^3, t^3 の立方根として求めることができ，r, s, t が求まる．

以下，少し技術的な注意をしておこう．s^3 の立方根の取り方は 3 通りあるが，実際には st も対称式なので，s の取り方に対して t の方は唯一通りに定まる．このようにして定まった 3 組の (r, s, t) に対応して α, β, γ も 3 組求まることになるが，それらは順番を除いて一致することが確かめられる．

演習 2.3　$st = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = e_1^2 - 3e_2$ であることを示せ．

演習 2.4　因数分解 $r^3 + s^3 + t^3 - 3rst = (r+s+t)(r^2 + s^2 + t^2 - rs - st - tr)$ を利用して $s^3 + t^3 = 27e_3 + 2e_1^3 - 9e_1e_2$ であることを示せ．

演習 2.5　次数を比較すれば適当な定数 a, b, c を用いて $s^3 + t^3 = ae_3 + be_1^3 + ce_1e_2$ と書けることが分かるが，あとは α, β, γ にうまい値を代入して係数 a, b, c を決定する方法も考えられる．これを実行せよ．

上の演習から $e_1 = -A = 0$ のときには $r = 0$ であって

$$st = -3e_2 = -3B, \quad s^3 + t^3 = 27e_3 = -27C$$

と大変簡単になることが分かる．したがって s^3, t^3 は X の 2 次方程式

$$X^2 + 27CX - 27B^3 = 0$$

の二根であり，

$$\begin{cases} s^3 = \dfrac{-27}{2}\left(C + \sqrt{C^2 + B^3/27}\right) \\ t^3 = \dfrac{-27}{2}\left(C - \sqrt{C^2 + B^3/27}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} s = 3\sqrt[3]{\dfrac{-C - \sqrt{C^2 + B^3/27}}{2}} \\ t = 3\sqrt[3]{\dfrac{-C + \sqrt{C^2 + B^3/27}}{2}} \end{cases}$$

であることが分かる．これより，次の**カルダーノの公式**を得る[3]．

---

[3] Cardano, Girolamo (1501–1576). ただしカルダーノの公式は，もとはといえばタルターリャ (Tartaglia, Niccolò (1500?–1557)) がダル・フェッロ (del Ferro, Scipione (1465–1526)) の解法を改良して得たものであった．カルダーノがタルターリャの発見を剽窃して発表したと非難する歴史書もあるが，どうもそれはあたらないようである．詳しくは [18] 参照．

$$\alpha = \frac{1}{3}(r+s+t)$$
$$= \sqrt[3]{\frac{-C+\sqrt{C^2+B^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-C-\sqrt{C^2+B^3/27}}{2}}.$$

2.2　群の同型と準同型

4 次方程式について述べる前に，群の同型について考えておこう．2 つの群が異なる局面で現れてきたとき，しばしばその 2 つの群が見掛けは異なるが本質的には同じであるとみなしたいことがよく起こる．そのようなとき，専門用語では，2 つの群は同型であると言いあらわすが，これを厳密に定義するにはどうしたら良いだろうか？ そのヒントが準同型写像と呼ばれる写像にある．現代数学においては,「写像」の果たす役割は大きく，“本質的に同じ” といった抽象的な概念さえも写像の言葉で表してしまうのである．

4 次方程式とも関係するので，例をあげて説明してみよう．

考える群は正 4 面体群 $G = \mathrm{Aut}(T_4)$ と 3 次の対称群 $H = \mathfrak{S}_3$ である．ここで T_4 は正 4 面体を表す記号であるが，便宜上，正 4 面体 T_4 の 4 つの頂点に 1 から 4 の番号を振っておこう．このとき，各頂点を V_i $(1 \leq i \leq 4)$ と書き，頂点 V_i と V_j を結ぶ辺 E_{ij} の中点を M_{ij} と表すことにする (図 2.2).

正 4 面体には 3 組の対辺があるが，その中点同士を結んだ 3 本の軸を考えよ

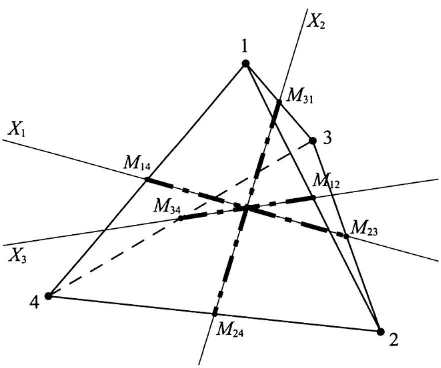


図 2.2　正 4 面体と 3 本の軸

う[4]．この軸を中点 2 つの組で表して

$$X_1=[M_{14},M_{23}],\quad X_2=[M_{24},M_{31}],\quad X_3=[M_{34},M_{12}] \tag{2.3}$$

と番号を振っておく．正 4 面体群の元はこの 3 つの軸の間の置換を引き起こすが，これを数字 $1,2,3$ の置換と考えれば，3 次対称群の元が得られる．

例えば，頂点 V_1 と面 F_{234} の重心を通る軸の周りの 120° 回転を考えよう．もちろん F_{234} は頂点 V_2,V_3,V_4 で決まる面を表している．回転の向きは V_1 から F_{234} を見降ろしたとき，反時計回りの方向に取る．各頂点がどのように移るかをみると，これは置換

$$\sigma=\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,3\,4\,2\end{pmatrix}$$

で表される．このとき，

$$\sigma(X_1)=[\sigma(M_{14}),\sigma(M_{23})]=[M_{12},M_{34}]=[M_{34},M_{12}]=X_3,$$

$$\sigma(X_2)=[\sigma(M_{24}),\sigma(M_{31})]=[M_{14},M_{23}]=X_1,$$

$$\sigma(X_3)=[\sigma(M_{34}),\sigma(M_{12})]=[M_{24},M_{31}]=X_2$$

だから，X の添字に注目するとこの $\sigma\in\mathrm{Aut}(T_4)$ に対応する $\mathfrak{S}_3$ の元は $\begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,1\,2\end{pmatrix}$ である．

演習 2.6　頂点 V_1,V_2 と辺の中点 M_{34} の 3 点を通る平面に関する鏡映 τ によって T_4 の頂点がどのように移りあうかを考えよ．また，この鏡映 τ によって 3 つの軸 X_1,X_2,X_3 がどのように移るかを計算し，τ に対応する $\mathfrak{S}_3$ の元を決めよ．

このようにして，2 つの群の間の写像 $\varphi:\mathrm{Aut}(T_4)\to\mathfrak{S}_3$ が得られ，しかもその決め方から

$$\varphi(g\circ h)=\varphi(g)\circ\varphi(h)\quad(g,h\in\mathrm{Aut}(T_4)) \tag{2.4}$$

が成り立っている．このようなとき，φ を準同型写像 (あるいは単に準同型) と呼ぶ．

---

4) 正 4 面体の各辺の中点を頂点とする多面体は正 8 面体である．上に書いた 3 本の軸とは，正 8 面体の原点をはさんで対になる頂点同士を結んだもので，これらの軸は直交している．

定義 2.7 G, H を 2 つの群とする．写像 $f: G \to H$ が**準同型**であるとは $f(xy) = f(x)f(y)$ $(x, y \in G)$ が成り立つことである．ここで xy は G における積を表し，$f(x)f(y)$ は H での積である．

上の写像 $\varphi: \mathrm{Aut}(T_4) \to \mathfrak{S}_3$ は式 (2.4) より群の準同型写像であることが分かる．他にも群の準同型はたくさんある．身近なところでは指数関数や対数関数も準同型である．指数関数は実数 $\mathbb{R}$ から正の実数 $\mathbb{R}_{>0}$ への写像であるが，$\mathbb{R}$ を加法群と見て，$\mathbb{R}_{>0}$ の方は実数の積によって乗法群とみなそう．そうすると，指数法則

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

がまさに $f(x) = e^x$ が準同型であることを意味していることに気づくだろう．この逆写像 $\log: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ は対数法則 $\log(xy) = \log x + \log y$ によって準同型になる．

他にも，複素数の絶対値は乗法群 $\mathbb{C}^\times$ から実数の乗法群 $\mathbb{R}^\times$ への準同型である．これは，絶対値の性質 $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ から分かる．

演習 2.8 行列式を一般線型群に制限して考えると自然に準同型とみなせることを説明せよ．この準同型は一般線型群からどのような群への準同型か？ 行列式が準同型であることを特徴付けている性質は何か？

準同型はある意味で一方の群の演算が他方の演算から誘導されているということを主張するものである．2 つの群が "本質的に同じである" という感覚は，まさしくこのような演算の誘導関係が対等であるという点にある．そこで，2 つの群の同型を次のように定義するのが妥当であろう．

定義 2.9 2 つの群 G_1, G_2 が**同型**であるとは，全単射準同型 $f: G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ が存在するときに言う．f を**同型写像**，あるいは単に**同型**と呼ぶ．2 つの群が同型であることを，記号で $G_1 \simeq G_2$ と表す．

定理 2.10 $f: G \to H$ が準同型であるとき，$f(e_G) = e_H$ および $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ が成り立つ．ただし，e_G および e_H はそれぞれ G および H の単位元である．さらに f の**核** $\mathrm{Ker}\, f = \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$ および f の**像** $\mathrm{Im}\, f = \{f(g) \in H \mid g \in G\}$ はそれぞれ G および H の部分群となる．

証明 まず，準同型の性質から $f(e_G^2) = f(e_G)f(e_G)$ であるが，$e_G^2 = e_G$ な

ので，左辺は $f(e_G)$ であることに注意する．したがって $f(e_G)=f(e_G)f(e_G)$. この $f(e_G)$ は H の元であって，H は群だから，もちろん逆元を持つ．そこで，逆元 $f(e_G)^{-1}$ を両辺に掛けると

$$f(e_G)^{-1}f(e_G)=f(e_G)^{-1}f(e_G)f(e_G),$$

$$\therefore \quad e_H=f(e_G).$$

次に，やはり準同型の性質を使うと

$$f(x)f(x^{-1})=f(xx^{-1})=f(e_G)=e_H.$$

順序を逆にした $f(x^{-1})f(x)=e_H$ も全く同様に確かめることができるので，$f(x)^{-1}=f(x^{-1})$ が分かる．このような抽象的な議論は無味乾燥で，一見するとあまり役に立たないように見えるが，実は非常に強力である．

次に $\operatorname{Ker} f$ が部分群になることを確かめよう．まず積に関して閉じていることを言おう．実際，$x, y \in \operatorname{Ker} f$ とすると，

$$f(xy)=f(x)f(y)=e_H\cdot e_H=e_H$$

となるから，$xy\in\operatorname{Ker} f$ である．また，既に示した $f(e_G)=e_H$ より，$e_G\in\operatorname{Ker} f$ であって，$\operatorname{Ker} f$ は単位元を持つ．さらに $x\in\operatorname{Ker} f$ に対して，$f(x^{-1})=f(x)^{-1}=e_H^{-1}=e_H$ だから $x^{-1}\in\operatorname{Ker} f$ であり，任意の元は逆元を $\operatorname{Ker} f$ の中に持つ．以上で $\operatorname{Ker} f$ は群の公理を満足することが分かり，確かに部分群である．

最後に $\operatorname{Im} f$ が部分群であることを今度は簡単に確認しておく．$f(x)f(y)=f(xy)\in\operatorname{Im} f$ より積に関して閉じており，$f(e_G)=e_H$ より単位元を含む．さらに $f(x)^{-1}=f(x^{-1})\in\operatorname{Im} f$ より逆元も存在している． ∎

$N=\operatorname{Ker} f\subset G$ と置くと，定理にあるように N は G の部分群であるが，非常に特殊な部分群であることが分かる．実際，任意の $g\in N, x\in G$ に対して

$$f(xgx^{-1})=f(x)f(g)f(x)^{-1}=f(x)ef(x)^{-1}=f(x)f(x)^{-1}=e$$

であるから $xgx^{-1}\in N$ が成り立つ．これを $N=xNx^{-1}$ のように表す．

定義 2.11 部分群 $N\subset G$ に対して，$N=xNx^{-1}$ $(\forall x\in G)$ が成り立つとき，N を G の**正規部分群**と呼ぶ．

上で考察したことは次のように言い表すことができる．

定理 2.12　$f : G \to H$ が準同型であるとき，$\operatorname{Ker} f$ は G の正規部分群である．さらに f が全射であるとき，f が同型写像であるための必要十分条件は $\operatorname{Ker} f = \{e\}$ が成り立つことである．

証明　同型の部分のみ証明が残っている．f の全射性は仮定されているから，単射性を示せばよい．$f(x) = f(y)$ とすれば，$e = f(x)f(y)^{-1} = f(xy^{-1})$ である．したがって，$xy^{-1} \in \operatorname{Ker} f = \{e\}$ だから $xy^{-1} = e \Longleftrightarrow x = y$ である．■

準同型 $\varphi : \operatorname{Aut}(T_4) \to \mathfrak{S}_3$ を構成するとき，正 4 面体群に属する合同変換に対して 4 つの頂点の置換，つまり 4 次の対称群の元を対応させた．これは $\operatorname{Aut}(T_4)$ から $\mathfrak{S}_4$ への同型写像である．実際，正 4 面体群 $G = \operatorname{Aut}(T_4)$ に属する合同変換は，4 つの頂点をどの頂点に動かすかで完全に決まる．したがってこの写像は単射である．一方，正 4 面体群の元の個数は定理 1.18 によって $\#G = 2fp = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ であってこれは 4 次の対称群の位数と同じであるから，4 つの頂点を任意の配置に移すような変換があることが分かる．つまりこの準同型写像は全射である．以上で次の定理が示された．

定理 2.13　正 4 面体群 $\operatorname{Aut}(T_4)$ は群として 4 次の対称群 $\mathfrak{S}_4$ と同型である．

演習 2.14　正 4 面体群 $\operatorname{Aut}(T_4)$ は旗の全体と一対一に対応しているのであった．一方，4 次の対称群 $\mathfrak{S}_4$ の元は $1, 2, 3, 4$ の置換，すなわち順列と対応している．そこで，旗 (V, E, F) に対して，次のように $1, \ldots, 4$ の順列を対応させよう．まず最初に，頂点 V の番号を i_1 とし，次に稜 E の端点を (i_1, i_2) とする．稜 E は端点に V を含むことに注意せよ．次に面 F が境界に含む頂点を (i_1, i_2, i_3) とし，最後に残った 1 つの頂点を付け加えて順列 (i_1, i_2, i_3, i_4) が得られる．このようにして $\mathfrak{S}_4$ と $\operatorname{Aut}(T_4)$ は旗を介して一対一に対応している．この対応が定理 2.13 の対応と同じものであることを示せ．

演習 2.15　演習 2.8 で考えた準同型 $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times$ に対して，核を求めよ．また，指数関数・対数関数・複素数の絶対値についても核を求めよ．どの準同型が同型であるか?

2.3　4 次方程式

では，いよいよ 4 次方程式について検討してみよう．4 次方程式

$$x^2 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) = 0$$

の対称群は正 4 面体群 $\mathrm{Aut}(T_4)$ $(\simeq \mathfrak{S}_4)$ であると考えることができる．根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を 4 面体の各頂点に配置すれば，正 4 面体群の元によって根の置換が引き起こされることが分かる．ここでの目標は，群の構造を使って 4 次方程式を既知の 3 次方程式に帰着することにある．以下，正 4 面体群を $\mathfrak{S}_4$ と同一視して話を進める．

そこで前節のように，正 4 面体群から 3 次の対称群への準同型 $\varphi : \mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$ を考え，その核を求めてみよう．この「核」の部分は $\mathfrak{S}_3$ では単位元にあたり，したがって (2.3) 式で定義された 3 本の軸 X_1, X_2, X_3 をすべて固定する．言い換えればこの「核」の部分を無視すれば $\mathfrak{S}_4$ はまるで $\mathfrak{S}_3$ (= 3 次方程式の対称性を表す群) のように見えるのである．

さて，核に属する置換をとろう．この置換は対辺を結ぶ 3 本の軸 X_1, X_2, X_3 をそれぞれ固定するが，それぞれの軸の方向は入れ替えてもよい．そこで §2.2 の記号で，1 本の軸 $[M_{\alpha,\beta}, M_{\gamma,\delta}]$ ($M_{\alpha,\beta}$ と $M_{\gamma,\delta}$ を結ぶ直線) を固定するような置換がどれくらいあるかをまず考えてみよう．ただし $M_{\alpha,\beta}$ は頂点 V_α, V_β を結ぶ辺の中点を表すのであった．$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に簡単のため $1, 2, 3, 4$ の数字を振り，軸 $X_3 = [M_{34}, M_{12}]$ を固定するような置換を考えてみよう．

$$e = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,3\,4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,4\,3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,3\,1\,2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,2\,1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}$$

の 8 つの元がこの軸を固定する．他の 2 つの軸を固定しているものも同様に考えると，それらの共通部分として

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,3\,2\,1 \end{pmatrix} \right\}$$

が得られる．この部分群に従って 4 つの根を組み合わせて次のようにおこう．

$$\begin{cases} s &= \alpha+\beta+\gamma+\delta \\ t &= \alpha-\beta+\gamma-\delta \\ u &= \alpha+\beta-\gamma-\delta \\ v &= \alpha-\beta-\gamma+\delta, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\alpha &= s+t+u+v \\ 4\beta &= s-t+u-v \\ 4\gamma &= s+t-u-v \\ 4\delta &= s-t-u+v. \end{cases}$$

演習 2.16　核 $\mathrm{Ker}\varphi$ の元 $g = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix}$ に対して

$$gs = hs = s, \quad -gt = ht = t, \quad gu = -hu = u, \quad -gv = -hv = v$$

が成り立つことを示せ．ただし数字 $1, 2, 3, 4$ と $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はこの順に対応しているものとする．定数倍を除いて，このような 1 次式 s, t, u, v は一意的である．

さて，$1, 2$ の入れ替え (**互換**) で 2 つの軸 X_1 と X_2 が入れ替わり，また $2, 3$ の入れ替え (互換) でも別の 2 つの軸 X_2 と X_3 が入れ替わる．この 2 つの互換で 3 つの軸の対称群 $\mathfrak{S}_3$ は生成されるから，この 2 つの置換が s, t, u, v にどのような効果をもたらすかを見てみよう．s はもともと対称式であるから，何も変わらない．しかし $(1,2)$ の互換では，α と β が入れ替わるので

$$t \mapsto -v, \quad u \mapsto u, \quad v \mapsto -t.$$

$(2,3)$ の互換では，β と γ が入れ替わるので

$$t \mapsto u, \quad u \mapsto t, \quad v \mapsto v$$

という置換が起こる．以上から t^2, u^2, v^2 の基本対称式は $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の対称式になっており，したがって係数の多項式として表せることが分かる．t^2, u^2, v^2 の基本対称式が分かれば，3 次方程式を解くことによって t^2, u^2, v^2 の値も求めることができる!

演習 2.17　実際には tuv は既に $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の対称式になっていることを示し，基本対称式で表せ．

演習 2.18　$t^2+u^2+v^2$, $t^2u^2+u^2v^2+v^2t^2$ を具体的に $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の基本対称式として表せ．

演習 2.19　$-A = e_1 = \alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$ のときには，上の式は非常に簡単になる．このとき t^2, u^2, v^2 は次の 3 次方程式の 3 根になることを示せ．

$$x^3 + 8Bx^2 + (16B^2 - 64D)x - 64C^2 = 0.$$

実際には $x = 4z$ と置換して $z^3 + 2Bz^2 + (B^2 - 4D)z - C^2 = 0$ を考えるのが実用的である．

4 次方程式の解法は 3 次方程式とほぼ同時期にカルダーノの弟子フェラーリによって発見された[5]．しかし彼の解法はここで解説したものとは少し違う．ここで行った群論に関係する考察はラグランジュによるものであるが[6]，それはガロアによる一般的な群と方程式の間の関係を詳述する理論の基礎となったのである．

演習 2.20　正 6 面体 (立方体) を C_6 で表し，$G = \mathrm{Aut}(C_6)$ を正 6 面体群とする．

(1) C_6 の各頂点に 1 から 8 までの番号を付けて，頂点の写り具合を考えることにより，準同型 $G \to S_8$ が得られる．この準同型は全射ではないが，単射であることを示せ．

(2) C_6 の相対する辺 (重心に関して点対称の関係にある 2 辺) の中点を結ぶ 6 本の軸を考えると G の元はこの 6 本の軸の置換を引き起こす．これにより準同型 $G \to S_6$ が得られるが，この準同型は単射ではないことを示せ．

(3) C_6 の相対する頂点 (対角線の両端) を結ぶ 4 本の軸を考えると G の元はこの 4 本の軸の置換を引き起こす．これにより準同型 $G \to S_4$ が得られるが，これは全射であることを示せ．

(4) 同じことを相対する面の重心を結ぶ軸について考えてみよ．このとき準同型は $G = \mathrm{Aut}(C_6) \to S_4 \simeq \mathrm{Aut}(T_4) \to S_3$ のように分解する．これは立方体と正 4 面体の間のどのような関係を反映しているだろうか?

2.4　準同型定理

2 つの群 G_1, G_2 の間に準同型 $\varphi : G_1 \to G_2$ が与えられているとき，これらの群はどのような関係にあるだろうか? これを群全体ではなく各元のレベルで考えてみると，$g_1 \in G_1$ と $g_2 \in G_2$ が φ を介して何らかの意味で関係している

---

[5] Ferrari, Lodovico (1522–1565).

[6] Lagrange, Joseph Louis (1736–1813). 本書の議論はクラインの示唆するところに大きく負うている．クラインの解説については [7, § VIII.1] を参照されたい．なお，クラインは 5 次方程式と正 20 面体群の間の関係についても興味深い研究を行っていることを注意しておこう ([8]).

とすれば，それは $\varphi(g_1)=g_2$ ということに他ならないであろう．したがって準同型 φ が与えられたとき，像 $\mathrm{Im}\,\varphi$ に属していないような G_2 の元は G_1 と関係しているとは言い難い．そこで以下 $\mathrm{Im}\,\varphi = G_2$, つまり φ が全射であることを仮定する．

具体的に考えてみよう．4 次方程式を考えるときに全射準同型 $\varphi : \mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$ が現れた．このとき像の各置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に対して，σ に写ってくる $\mathfrak{S}_4$ の置換 τ が存在している．では，このような $\tau \in \mathfrak{S}_4$ をすべて求めるにはどうすればよいだろうか? $\varphi(\tau)=\sigma$ となるような τ の全体は σ の**逆像**と呼ばれ，記号で

$$\varphi^{-1}(\sigma) = \{\tau \in \mathfrak{S}_4 \mid \varphi(\tau) = \sigma\}$$

と表される．これを σ の**ファイバー**ということもある．例えば恒等置換 $\varepsilon \in \mathfrak{S}_3$ のファイバーは核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ に他ならない．

我々は φ を正 4 面体 T_4 を用いて構成した．すなわち T_4 の各頂点に数字 $1,2,3,4$ を振り，まず $\mathrm{Aut}(T_4)=\mathfrak{S}_4$ とみなす．次に T_4 の各辺の中点とその対辺の中点を結ぶ 3 本の軸を考え，これらの軸の入れ替えとして置換 $\tau \in \mathfrak{S}_4$ に対応する $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ を得る．このような具体的な構成を用いて，各 $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ のファイバー $\varphi^{-1}(\sigma)$ を計算することはなかなか大変な作業である．核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ を求めたときのことを考えてみるとよいだろう．しかし，これを非常に効率的に行う 1 つの方法がある．

問題を少し抽象的に考えてみよう．数学では具体的な計算をすることなく，問題を抽象的に考え直すことがしばしば有効である．そこで具体例を離れ，一般の準同型写像 $\varphi : G_1 \to G_2$ に戻る．G_2 の元 σ のファイバー $\varphi^{-1}(\sigma)$ に属する 2 つの元 $\tau_1, \tau_2 \in G_1$ を取ろう．この 2 つの元が同じファイバーに属するということは

$$\begin{aligned}\varphi(\tau_1) = \sigma = \varphi(\tau_2) &\iff \varphi(\tau_1)^{-1}\varphi(\tau_2) = e \ \ (e \text{ は } G_2 \text{ の単位元})\\ &\iff \varphi(\tau_1^{-1}\tau_2) = e\\ &\iff \tau_1^{-1}\tau_2 \in \mathrm{Ker}\,\varphi\end{aligned}$$

ということである．つまり $\tau_2 \in \tau_1 \cdot \mathrm{Ker}\,\varphi$ だから，もし 1 つの $\tau_1 \in \varphi^{-1}(\sigma)$ と核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ が求まっていれば，ファイバーは $\varphi^{-1}(\sigma) = \tau_1 \cdot \mathrm{Ker}\,\varphi$ として計算できる!

演習 2.21　上で考えた準同型 $\varphi : \mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$ の場合に，各 $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に対して $\varphi^{-1}(\sigma)$ をこの方法で計算せよ．

$N = \mathrm{Ker}\,\varphi$ と置くと，定理 2.12 により，これは G_1 の正規部分群なのであった．このとき，各 $\sigma \in G_2$ に対して，そのファイバー $\varphi^{-1}(\sigma)$ は τN の形をしており G_1, G_2 の間には $\tau N \leftrightarrow \sigma$ のような対応が存在している．いまもう一組の $\tau' \in G_1$, $\sigma' \in G_2$ を取って $\varphi(\tau') = \sigma'$ とすると，φ が準同型であるから

$$\varphi(\tau\tau') = \varphi(\tau)\varphi(\tau') = \sigma\sigma', \quad \therefore\ \tau\tau' \in \varphi^{-1}(\sigma\sigma')$$

が成り立つ．つまり $\varphi^{-1}(\sigma) \cdot \varphi^{-1}(\sigma') = \varphi^{-1}(\sigma\sigma')$ である．これはあたかも $\varphi^{-1}(\sigma) = \tau N \subset G_1$ が G_2 における σ のように振る舞うことを意味している．

正規部分群に対しては $\tau N \tau^{-1} = N$ が成り立つから $\tau N = N\tau$ であることにも注意しよう．すると上の計算は

$$(\tau N) \cdot (\tau' N) = \tau(N\tau')N = \tau\tau' N \cdot N = \tau\tau' N$$

のようにしてもよい．ここで N は部分群であるから，N の元を 2 つ掛けてもやはり N に含まれ，$N^2 = N$ となることを用いた．このように τN $(\tau \in G_1)$ の形の集合の間に**積が定義できる**．そこで $[\tau] = \tau N$ と簡単に書くことにしよう．

演習 2.22　G を群，$N \subset G$ を正規部分群とし，$[\tau] = \tau N$ と書く．

(1) $[\tau_1][\tau_2] = [\tau_1\tau_2]$ によって積を定めると，これは結合律を満たすことを示せ．

(2) $[e] = eN$ がこの積に関する単位元であることを示せ．ただし e は G の単位元である．

(3) 逆元は $[\tau]^{-1} = [\tau^{-1}]$ で与えられることを示せ．

定義 2.23　群 G とその正規部分群 N が与えられたとき $[\tau] = \tau N$ と置いて $G/N = \{[\tau] \mid \tau \in G\}$ と表す[7]．G/N には自然に積 $[\tau] \cdot [\tau'] = [\tau\tau']$ が定義され，これによってまた群になる．G/N を G の N による**商群**という．

上の例 $\varphi : \mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$ では，要するに商群 $\mathfrak{S}_4/\mathrm{Ker}\,\varphi$ を考えると，これは $\mathfrak{S}_3$ と "同じ" とみなすことができるということである．これを群の同型というのであった．記号で $\mathfrak{S}_4/\mathrm{Ker}\,\varphi \simeq \mathfrak{S}_3$ と書く．これと全く同様にして次の定理を示すことができる．

---

[7] ただし $\tau \neq \tau'$ であるにもかかわらず $[\tau] = [\tau']$ となることがあるから，そのような場合は (集合の定義より) 同じ集合を 2 度以上は数えず，そのうちの 1 つだけを G/N の元とする．

定理 2.24 (準同型定理) 2 つの群 G_1, G_2 の間に全射準同型 $\varphi : G_1 \to G_2$ が与えられているとき，同型 $G_1/\mathrm{Ker}\varphi \simeq G_2$ が成り立つ．

証明のあらすじは既に与えたが，より詳しくは，例えば [38], [47] などを参照されたい．

演習 2.25 演習 2.20 (3) で与えられた全射準同型を $\psi : \mathrm{Aut}(C_6) \to \mathfrak{S}_4$ とする．核 $\mathrm{Ker}\psi$ を求め，準同型定理を適用せよ．また (1), (2) で与えられた準同型についても考察してみよ．

演習 2.26 2 元 s, t で生成された自由群 F_2 を考える (§1.5.1 参照)．2 面体群 D_n への準同型 $f : F_2 \to D_n$ を $f(s) = a$, $f(t) = b$ で定める．ただし $a, b \in D_n$ は §1.4.1 で与えられた D_n の生成元である．$\mathrm{Ker} f$ の元をいくつかあげ，それがどのような意味を持つかを考えよ．準同型定理をこの場合に即して述べるとどうなるだろうか?

第3章　群の表現と不変式

第2章では，数学における群の役割について，主に方程式を例に考えてきたが，この章と次の章では，群の理論の背後にある基本的な考え方や理論を中心に解説しよう．図形や幾何学における不変量を群の言葉で書き表し，抽象的に洗練した形でとらえるには，まず群の「表現」という概念を導入する必要がある．

3.1　有限群の表現

しばらくの間，特に断らなければ G を有限群とする．以下の議論では G が有限群であることはそれほど本質的ではないが，例えば連続性や無限次元ベクトル空間といった初心者向きでない議論を省くためには都合がよい．

V をベクトル空間とするとき，V から V への可逆な線型写像 (= ベクトル空間としての同型写像) の全体を $\mathrm{GL}(V)$ と書く．$\mathrm{GL}(V)$ は写像の合成を積として自然に群の構造を持つ．§1.5.3 の言葉遣いでは，V のベクトル空間としての構造を保つような自己同型写像の全体，つまり $\mathrm{Aut}(V)$ のことを $\mathrm{GL}(V)$ と書くのである．

定義 3.1　V をベクトル空間とするとき，群の準同型 $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ を G の V 上の**表現**といい，$g \in G$ に対して $\pi(g) \in \mathrm{GL}(V)$ を**表現の作用素**，V を**表現空間**と呼ぶ．つまり $\forall g \in G$ に対して，正則な線型写像 $\pi(g) : V \to V$ が対応していて

$$\pi(g \cdot h) = \pi(g) \cdot \pi(h) \quad (g, h \in G) \tag{3.1}$$

が成り立つとき (π, V) の組を表現と呼ぶのである．

例えば，$V = \mathbb{C}^n$ が数ベクトル空間のとき，$\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は正則な $n \times n$ 行列の全体である．したがって $\mathbb{C}^n$ 上の表現とは，

(1) $g \in G$ に対して正則行列 $\pi(g) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を対応させる写像で，しかも

(2) $\pi(g \cdot h) = \pi(g) \cdot \pi(h) \ (g, h \in G)$ が成り立つ

ようなもののことである．ここで (2) の左辺の積 $g \cdot h$ は群の積であり，右辺の積 $\pi(g) \cdot \pi(h)$ は行列の積であることに注意しよう．このように行列で表された表現を特に**行列表現**と呼ぶこともある．

例 3.2 (対称群の置換表現)　$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ の置換 $\sigma : [n] \to [n]$ に対して，行列 $T_\sigma = (t_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ を (i, j) 成分が $t_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)}$ であるように決める．ただし δ_{ij} はクロネッカーの δ である[1]．あるいは

$$T = (\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{e}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)})$$

と書いたほうが分かりやすいかもしれない．ただし $\boldsymbol{e}_i$ は i 番目の基本ベクトル (第 i 成分だけが 1 で他の成分はすべてゼロのタテベクトル) である．例えば S_3 のときには次のようになる．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix} \text{ のとき } T_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{単位行列}),$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix} \text{ のとき } T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix} \text{ のとき } T_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix} \text{ のとき } T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix} \text{ のとき } T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{巡回行列}),$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} \text{ のとき } T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{巡回行列}).$$

このようにして得られた写像 $\sigma \mapsto T_\sigma$ が n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の行列表現になることを確かめてみよう．それには $T_\sigma \cdot T_\tau = T_{\sigma \cdot \tau}$ であることを確かめればよい．実

---

[1] Kronecker, Leopold (1823–1891)．クロネッカーの δ (デルタ) は $i = j$ のとき $\delta_{ij} = 1$，$i \neq j$ のとき $\delta_{ij} = 0$ と規約された記号である．

際，左辺の (i,j) 成分は

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\tau(j)} = \delta_{i,\sigma(\tau(j))} = \delta_{i,\sigma\cdot\tau(j)} = (\text{右辺の } (i,j) \text{ 成分}).$$

したがってこれは $\mathfrak{S}_n$ の数ベクトル空間 $V = \mathbb{C}^n$ 上の表現である．これを**置換表現**，T_σ を σ に対応する**置換行列**と呼ぶ．

例 3.3 (2 面体群の自然表現)　n 次 2 面体群 D_n の元は平面上の原点を中心とする回転移動，または原点を通る直線に関する鏡映 (線対称移動) であった．これらの合同変換は一次変換として行列で表されるので D_n の 2 次元表現が得られる．これを**自然表現**あるいは**定義表現**と呼ぶ．

§1.4.1 のように D_n の 2 つの生成元 a, b を a は原点を中心とする角度 $2\pi/n$ の回転，b は x 軸に関する鏡映となるように選ぶ．この 2 つの元が表す一次変換を行列として書き下すと，

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}, \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となっているから，これがちょうど D_n の自然表現を与える行列である．ここで D_n の表現を与える準同型を $\rho : D_n \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ と書いた．D_n の他の元の ρ による像は，すべてこれら 2 つの行列のいくつかの積として表されている．

例 3.4 (正多面体群の自然表現)　正多面体群の元は 3 次元空間内の (原点を通る直線を軸とする) 回転移動，または原点を通る平面に関する鏡映であって，そのどちらもが 3 次の正則行列で表現されている[2)]．2 面体群の場合と同じように，これを正多面体群の**自然表現**または**定義表現**と呼ぶ．

3 次元の回転を表す行列と鏡映を表す行列を以下具体的に求めておこう．

まず回転から考える．$\mathbb{R}^3$ に通常のように x, y, z 軸を考える (図 3.1)．このとき x 軸を回転軸とする yz 平面上の角度 α の回転を $R_x(\alpha)$ と書こう．ただし回転の向きは右ネジが x 軸の正方向に進む向きに回転する[3)]ことにする．同様に y 軸を回転軸とする角度 α の回転を $R_y(\alpha)$ とし，z 軸を回転軸としたものを $R_z(\alpha)$ と書こう．これらの回転を行列で表示すると

---

2) 実空間の回転・鏡映は (実数も複素数の一種であるから!) 係数を複素数とみなすことによって複素線型写像と見ることができる．

3) これは x 軸の正の方向から yz 平面を見下ろすとき反時計回りにまわる向きと言ってもよい．

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のようになる．

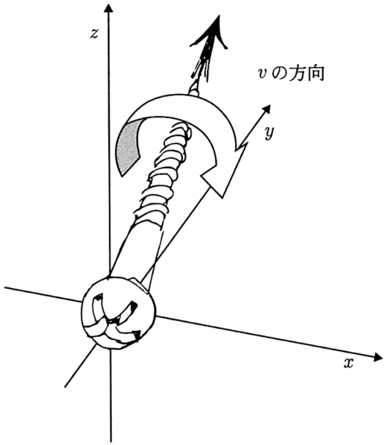


図 3.1 3 次元の回転

では，一般の回転軸を持った回転行列はどうなるのだろうか? それには 2 つの考え方がある．そのうちの 1 つは，これら 3 軸の回転を利用するものである．

そこで原点を通る直線を軸とする一般の回転を表すのに，回転軸の代わりに単位ベクトル $v = {}^t(p, q, r)$ を考えよう[4]．単位ベクトルであるから p, q, r は $p^2 +$

---

[4] ここで ${}^t(p, q, r)$ は行ベクトルの転置，つまり列ベクトルを表している．ベクトルをタテ書きにすると場所を取るので本書ではしばしば列ベクトルを表すのにこのような転置記号を用いる．また，3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトルを $\vec{v}$ や $\boldsymbol{v}$ などと表したりすることもあるが，このように普通のイタリック書体 v でベクトルを表すことにする．

$q^2+r^2=1$ を満たしている．このベクトル v は回転軸の方向を表しており，厳密に言うと $\pm v$ は同じ回転軸を表しているが，回転角を決めるときにその方向が重要になる．つまり，v 方向を軸とする角度 α の回転では，右ネジの進行方向を v の方向に取って角度 α だけ回すように回転する．

さて，回転行列を計算するには，まず v を xy 平面上に正射影し，それを v' とする．ベクトル v' と x 軸の正の方向がなす角を θ とし，v' と v がなす角度を φ とする．単位球面を地球に見立てて，北極を ${}^t(0,0,1)$, 南極を ${}^t(0,0,-1)$ とし，赤道面を xy 平面上に取ることにしよう．すると，ベクトル v の終点を単位球面上つまり地球上に配したとき，ちょうど v の指し示す地点の経度が θ で，緯度が φ になると言っても同じことである (図 3.2)．ただし点 ${}^t(1,0,0)$ の経度は 0 であると決めておく．

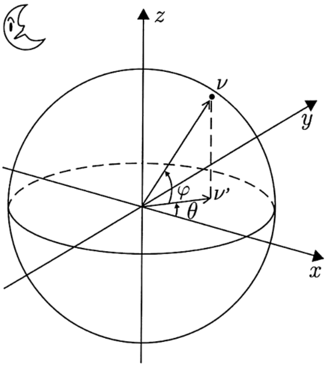


図 3.2　緯度と経度

このように考えると v は基本ベクトル $e_1={}^t(1,0,0)$ をまず y 軸のまわりに $-\varphi$ だけ回転し，次に z 軸のまわりに θ だけ回転して得られることが図より見て取れるだろう．つまり $v=R_z(\theta)R_y(-\varphi)e_1$ である．

ベクトル v を回転軸とする角度 α の回転行列を $R_v(\alpha)$ と表そう．すると $R_v(\alpha)$ は e_1 を回転軸とする回転，つまり $R_x(\alpha)$ を用いて次のように書ける．

$$\begin{aligned} R_v(\alpha) &= (R_z(\theta)R_y(-\varphi))\cdot R_x(\alpha)\cdot (R_z(\theta)R_y(-\varphi))^{-1} \\ &= R_z(\theta)R_y(-\varphi)R_x(\alpha)R_y(\varphi)R_z(-\theta). \end{aligned}$$

実際，まず $(R_z(\theta)R_y(-\varphi))^{-1}$ によって v を e_1 の位置に持ってゆき，e_1 を軸として回転する．その後，回転軸を $R_z(\theta)R_y(-\varphi)$ によって v の位置に戻す．このようにして v を軸とする回転が得られる．

しかし，この表示は 5 つの行列の積として表されているため，計算はかなり煩雑である．そこで，第二の方法を考えよう．

空間内の任意の点 $\xi \in \mathbb{R}^3$ を取り，これを単位ベクトル v の方向を軸として回転する．まず ξ を v の方向とそれに垂直な成分 u に分解する．

$$\xi = (v,\xi)v + u, \quad u = \xi - (v,\xi)v.$$

ただし (v,ξ) はベクトル v と ξ の内積である．次に u と v に垂直なベクトル w を外積を用いて $w = v \times u$ と決める．外積の定義によれば v, u, w の順に並べたとき，この 3 つのベクトルは右手系をなすので，w はちょうど v を軸として u を 90° 回転したベクトルである[5)]．したがって，u を α だけ回転したベクトルは，平面の回転の場合を元にして考えると

$$\begin{aligned}\cos\alpha \cdot u + \sin\alpha \cdot w &= \cos\alpha \cdot (\xi - (v,\xi)v) + \sin\alpha \cdot v \times (\xi - (v,\xi)v) \\ &= \cos\alpha \cdot (\xi - (v,\xi)v) + \sin\alpha \cdot v \times \xi\end{aligned}$$

となる．一方，v に平行な ξ の成分は回転されないから，結局 ξ を v を軸として回転して得られたベクトルは，

$$\cos\alpha \cdot \xi + (1-\cos\alpha)\cdot(v,\xi)v + \sin\alpha \cdot v \times \xi \tag{3.2}$$

と計算される．さらに，これを成分で書き表すことにより回転行列

$$R_v(\alpha) = \cos\alpha \cdot 1_3 + (1-\cos\alpha)\cdot v \cdot {}^t v + \sin\alpha \cdot (v \times e_1, v \times e_2, v \times e_3)$$

を得る．ただし e_i は基本ベクトル，1_3 は 3 次の単位行列である．v は列ベクトルとみなしているので，$v \cdot {}^t v$ は 3 次正方行列であり，最後の $(v \times e_1, v \times e_2, v \times e_3)$ は第 j 列が $v \times e_j$ であるような 3 次正方行列を意味する．逆にこの式を用いると $R_v(\alpha)\xi$ がまさしく式 (3.2) と一致することを容易に確かめられる．

演習 3.5 頂点が $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\pm1,\pm1,\pm1)$ であるような正 6 面体 (立方体) C_6 を考える．このとき，頂点 $v = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ と $-v = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)$ を結ぶ対

---

5) v が単位ベクトルであるから，u と w は同じ長さを持っていることに注意．

角線に関する，角度が $2\pi/3$ の回転 $R_v(2\pi/3)$ は正 6 面体群 $\mathrm{Aut}(C_6)$ に属する．回転行列 $R_v(2\pi/3)$ を具体的に求めよ．

重心を原点に取って，単位球に内接するような正多面体を考えよう．多面体の頂点 v を取り，頂点の周りに m 個の面が集まっているとすれば，正多面体群 G には回転 $R_v(2\pi/m)$ が属していることになる．他にも各面の重心を軸とする回転，各辺の中点を軸とする 180° 回転が G に属しているが，それらはすべて上で得られた公式を用いることで行列表示できる．

最後に，鏡映を行列表示してみよう．原点を通る平面はその法線方向が決まれば決まる．そこで単位ベクトル u を法線方向とする平面 H に関する鏡映を考え，その行列表示を S_u または S_H で表そう (図 3.3).

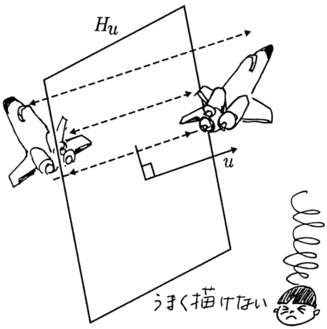


図 3.3　鏡映

さて，空間内の任意の点 ξ を取り，これを S_u で写した点を $\xi' = S_u(\xi)$ と書く．このときベクトル $\xi' - \xi$ は平面 H に垂直であって，2 点 ξ, ξ' の中点がちょうど H 上にある．これを式で表すと，

$$\xi' - \xi = cu \ (\exists\, c \in \mathbb{R}), \quad \left(u, \frac{\xi + \xi'}{2}\right) = 0$$

となる．そこで $\xi' = \xi + cu$ を第 2 の式に代入して，u が単位ベクトルであったことに注意すると $c = -2(u, \xi)$ が分かる．したがって $\xi' = \xi - 2(u,\xi)u$ であって，これが $S_u(\xi)$ である．成分を計算して，行列として表示すると

$$S_u = 1_3 - 2u \cdot {}^t u \tag{3.3}$$

となることが分かる．また必ずしも単位ベクトルでないベクトル $v \neq 0$ を法線方向とする平面 H_v に関する鏡映 S_v は

$$S_v(\xi) = \xi - \frac{2(v,\xi)}{\|v\|^2}v \quad (\xi \in \mathbb{R}^3) \tag{3.4}$$

で表されるが，この式も鏡映の表示としてよく用いられる．

演習 3.6 演習 3.5 と同じ記号を使って正 6 面体群 $\mathrm{Aut}(C_6)$ を考えよう．このとき，単位ベクトル $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ に垂直な平面 H に関する鏡映は $\mathrm{Aut}(C_6)$ の元である．鏡映を表す行列 S_u を具体的に求めよ．

例 3.7 (巡回群の 1 次元表現) 自然数 n を 1 つ固定して，整数 $\mathbb{Z}$ を n で割った余りによって代表させたものを，n を法とする $\mathbb{Z}$ の**剰余系**と呼ぶ．記号では $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と書き，n で割った余りであるから

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$$

と考えることにする．ただし，本来は任意の整数を考えるのであるから，例えば 1 の代わりに $1+n$ や $1+5n$ あるいは $1-2n$ を考えてもよい．これらはすべて同じ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元を表すと考え，$\mathrm{mod}\ n$ で等しいと言う．

剰余系 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ には，通常の和および積を行ってから n で割った余りを対応させることで和・積が定義できる．この和と積に対しては，ごく普通の数の和と積を計算するのと同じように結合律や分配律などが成り立っている．

例えば $n=5$ なら，13 と 8 は 5 で割ると同じ余り 3 を持つので，$13 \equiv 8 \pmod 5$ と書く．負の数でも同様で，$-3 \equiv 2 \pmod 5$ である．加法や乗法は

$$3+4=7\equiv 2 \pmod 5, \quad 3-4=-1\equiv 4 \pmod 5,$$

$$4\times 2=8\equiv 3 \pmod 5, \quad 3\times 2=6\equiv 1 \pmod 5,$$

$$(2+4)\times 3=2\times 3+4\times 3\equiv 1+2=3 \pmod 5$$

のように行うことができる．ついでに加法の表と乗積表をあげておこう．

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

演習 3.8 $k \in \mathbb{Z}$ が 5 の倍数ではないとき，上の乗積表を見て次のことを確かめよ．

(1) $k \times m \equiv 1 \pmod 5$ となるような m が存在することを示せ．

(2) $k^m \equiv 1 \pmod 5$ となるような自然数 m が存在することを示せ．

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は和について考えると明らかに可換群 (加法群) をなすが，0 は加法の単位元，1 は生成元となっている．実際

$$
\begin{aligned}
&2 = 1+1, \\
&3 = 1+1+1, \\
&\cdots, \\
&n-1 = 1+1+\cdots+1 \quad ((n-1)\ \text{個の和})
\end{aligned}
$$

のように，あたりまえのことではあるが，すべての元が 1 を何回か加えていくことで得られる．このように唯一つの元で生成される群を**巡回群**と呼ぶ．特に $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は位数が n の巡回群である[6]．

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の 1 次元表現 ρ_m が $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$
\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ni k \mapsto \rho_m(k) = e^{2km\pi i/n} \in \mathbb{C}^\times
$$

によって与えられる．このように与えられた ρ_m が実際に表現になることを確かめてみよう．$\mathbb{C}^\times$ は，いささか特殊な場合ではあるが，$\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ とみなすことができる．したがって上の写像が群の準同型であることを確かめればよい．

まず写像が矛盾なく決まっていることを確認する．もし $k, k' \in \mathbb{Z}$ に対して，その n で割った余りが同じであるとすると，$k-k'$ は n の倍数であるから $k-k' = qn \ (q \in \mathbb{Z})$ と書けている．したがって

$$
\rho_m(k) = e^{2km\pi i/n} = e^{2(k'+qn)m\pi i/n}
$$

[6] 逆に位数が n の巡回群は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に同型である．巡回群の位数が ∞ であれば加法群 $\mathbb{Z}$ に同型である．

$$= e^{2k'm\pi i/n}(e^{2\pi i})^{qm} = e^{2k'm\pi i/n} = \rho_m(k')$$

となり，写像 ρ_m は n で割った余りのみに依存することが分かる．

次に ρ_m が加法群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ から乗法群 $\mathbb{C}^\times$ への群準同型であることを確かめよう．$k, \ell \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対し，

$$\rho_m(k+\ell) = e^{2\pi(k+\ell)mi/n} = e^{2\pi kmi/n}e^{2\pi\ell mi/n} = \rho_m(k)\rho_m(\ell)$$

となり，確かに演算を保っているから，群の準同型である．

演習 3.9 (1) 次の $\tau_m : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の 2 次元行列表現を定めることを示せ．

$$\tau_m(k) = \begin{pmatrix} \cos(2mk\pi/n) & -\sin(2mk\pi/n) \\ \sin(2mk\pi/n) & \cos(2mk\pi/n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2m\pi/n) & -\sin(2m\pi/n) \\ \sin(2m\pi/n) & \cos(2m\pi/n) \end{pmatrix}^k.$$

(2) 一般に $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ を $A^n = 1_d$ (d 次単位行列) を満たすような正則行列とする．このとき $\tau(k) = A^k$ と置けば，τ は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の d 次元表現を定めることを示せ．

3.2 群の作用と表現

X を何らかの性質を備えた集合とする．この性質は，解析的な性質でもよいし，代数的な性質や，幾何学的な性質でも構わない．解析性の代表選手は微分可能性であろう．代数的な性質であれば，例えば四則演算を持っていることや線型性である．幾何学的性質については既にいろいろ見てきたが，距離であったり，多面体であったり，あるいは連結性であったりする．いろいろな性質があるだろうが，そのような性質を備えた集合 X のことをしばしば**空間**とよぶ[7]．X に与えられた性質を保つような X からそれ自身への写像 $f : X \to X$ であって，逆写像 f^{-1} を持ち，さらに f^{-1} も同じ性質を保つとき，f を X 上の**自己同型**あるいは変換と呼ぶ．自己同型の全体は群をなすのでこれを $\mathrm{Aut}(X)$ と書き，自

[7] 位相空間，ベクトル空間，解空間，関数空間等々．少しニュアンスが違うが，物理学でよく使う「場」という言葉も空間と似た響きがある．

己同型群と呼ぶのであった (定理 1.23 参照).

G を群とし，群準同型 $\varphi: G \to \mathrm{Aut}(X)$ が与えられたとき，G は X に**作用する**という．この "群の作用" という概念はこの後の話でも非常に大切でよく使われる．ちょうどいい機会であるから，ここで式を用いてしっかり定義を確かめておこう．群の作用を準同型という言葉を使わずに定義すると次のようになる．

定義 3.10　写像 $\alpha: G \times X \to X$ が与えられており，

(1) $\alpha(e,x) = x$ ($e \in G$ は単位元, $\forall x \in X$)

(2) $\alpha(g,\alpha(h,x)) = \alpha(g \cdot h,x)$ ($\forall g,h \in G, \forall x \in X$)

が成り立つとき，$\alpha(g,x) = g \cdot x$ または単に gx と書いて，これを $g \in G$ の $x \in X$ への作用と呼ぶ．また，群 G は空間 X に作用するとか**働く**という．このとき，記号で $G \curvearrowright X$ と表すことがある．

上の定義の意味で，G の作用 $\alpha: G \times X \to X$ が与えられているとき，群の元 $g \in G$ を 1 つ固定して考えると，

$$X \ni x \mapsto \alpha(g,x) \in X$$

は X の自己同型を引き起こす．したがって $\alpha(g,\cdot) \in \mathrm{Aut}(X)$ と考えられるが，これが上の準同型 $\varphi: G \to \mathrm{Aut}(X)$ を与えることになる．つまり $\varphi(g)(x) = \alpha(g,x)$ である．

逆に群準同型 $\varphi: G \to \mathrm{Aut}(X)$ が与えられていれば，

$$\alpha(g,x) = \varphi(g)(x) \quad (g \in G, x \in X)$$

と置くことにより，定義 3.10 の (1), (2) を満たすことが分かる．このように，準同型 $\varphi: G \to \mathrm{Aut}(X)$ と，写像 $\alpha: G \times X \to X$ で定義 3.10 の (1), (2) を満たすものは一対一に対応している．

さて，以下 G が集合 X 上の変換群 $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群である場合を考えよう．このようなとき，G は X に**忠実に作用**しているという．$g \in G$ は X の自己同型写像 $g: X \to X$ を引き起こす[8]が，$x \in X$ の g による像を $g \cdot x$ あるいは単に gx と記すのであった．また，$g \cdot x$ は g によって x が移動した点であると思うと考えやすい．$\mathrm{Aut}(X)$ の群演算としての積は写像の合成，つまり引き続き行うということであるから，$g,h \in G$ に対して，

---

[8] 上で $\varphi(g)$ と書いていたものを煩雑なので単に g で表す．

$$g(hx) = (gh)x \quad (x \in X)$$

が成り立っている．また単位元 $e \in G$ は X の恒等写像として作用する．つまり $ex = x$ $(x \in X)$ である．これが定義 3.10 の条件 (1), (2) の簡便な記法であることはすぐに了解されるであろう．

G の空間 X への作用と，G の表現の間の関係について考えてみる．

まず，G の作用する空間 X がベクトル空間であって，$\mathrm{Aut}(X)$ が線型同型写像全体であるときは，G の作用と G のベクトル空間 X 上の表現は言い表し方が異なるだけで実質的には同じものである．G の表現を作用とみなすときには特に "線型な作用" と呼ぶこともある．

一般には，空間 X はベクトル空間ではないし，たとえベクトル空間であったとしても変換群 $\mathrm{Aut}(X)$ はもしかすると線型変換以外のものを含んでいるかもしれない．したがって，G がただ単に作用しているというだけでは，残念ながら G の表現を得ることはできない．しかし，X をうまくベクトル空間で置き換えてやれば，表現を作ることができる．では，どのようなベクトル空間を考えればよいか?

このようなとき，一番たのもしく，役に立つのが X 上の関数たちである．ご存知のように，ある集合上の関数は各点ごとに加えることもできるし，定数倍することもできるから，ベクトル空間をなす．関数については，各点ごとの積も考えられるから，X 上の関数全体は，和と積を持つような代数系 (つまり環) になっていて大変都合がよい．しかし，ここではさしあたってベクトル空間としての構造だけを考えることにして，それを $V = \{f(x) : X \text{ 上の関数}\}$ と書こう．関数 $f(x) \in V$ と $g \in G$ に対して

$$(\rho(g)f)(x) = f(g^{-1} \cdot x) \quad (x \in X) \tag{3.5}$$

と決めると，$(\rho(g)f)(x)$ は再び X 上の関数になって，写像 $\rho(g) : V \to V$ が得られる．これが線型写像であることはほとんど明らかであろう．

補題 3.11 G が集合 X に作用しているとする．V を X 上の関数全体のなすベクトル空間として，$\rho(g) : V \to V$ を上式 (3.5) のように決めれば，(ρ, V) は G の表現である．

証明 残っているのは，群準同型の性質

$$\rho(g \cdot h) = \rho(g)\rho(h) \quad (g, h \in G)$$

を確かめることだけである．そこで，両辺を関数 $f(x) \in V$ に施してみると，左辺は

$$\rho(g \cdot h) f(x) = f((gh)^{-1}x) = f(h^{-1}g^{-1}x)$$

である．一方，右辺は

$$(\rho(g)(\rho(h)f))(x) = (\rho(h)f)(g^{-1}x) = f(h^{-1}g^{-1}x)$$

となって両者は等しい． ∎

X が有限集合ならば，V は有限次元のベクトル空間になるが，X が無限集合ならば V は一般に無限次元のベクトル空間である．さらに X が多様体などの場合には，"関数" として，微分可能な関数 $(V = C^\infty(X))$，解析関数 $C^\omega(X)$，多項式関数 $\mathbb{C}[X]$，連続関数 $C(X)$，自乗可積分な関数 $L^2(X)$ などいろいろなものが考えられることに注意しておこう．

例 3.12 (対称群の多項式表現) 例 3.2 で考えた，n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の置換表現 $(T_\sigma, V = \mathbb{C}^n)$ を思い出そう．そこで与えられた行列表現 T_σ によると，ベクトルへの作用は次のように書ける．

$$T_\sigma \, {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {}^t(x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

ここでも，場所の節約のため，タテベクトルを転置の記号 ${}^t(\cdot)$ を用いて表している．さて，V 上の n 変数多項式関数の全体を $\mathbb{C}[V]$ と書けば，この例の直前で説明したように，多項式関数 $f(x) \in \mathbb{C}[V]$ にも自然に $\mathfrak{S}_n$ が働く．

$$(\pi(\sigma)f)(x) = f(T_{\sigma^{-1}} \cdot x) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$
$$(\sigma \in \mathfrak{S}_n, x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in V).$$

つまり，関数 $f(x)$ に対して $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ は，変数の成分の入れ替えとして働くことが分かる．特に $\deg f$ で多項式 f の**全次数**[9] を表せば， $\deg f = \deg(\pi(\sigma)f)$ が成り立つ．

多項式 $f(x)$ は，定数 λ に対して $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ が成り立つとき**斉次 d 次多項式**と呼ばれる．もちろん，このとき $\deg f = d$ であるが，f が斉次 d 次で

---

[9] 全次数というのは全部の変数に関する次数という意味である．例えば，x^2yz や x^4 や y^2z^2 などは x, y, z の多項式としてはすべて 4 次式と考える．

あるとは多項式 f に現れる単項式がすべて d 次であることを意味している．f が斉次 d 次ならば，置換 $\sigma \in S_n$ に対して σf もまた斉次 d 次である．実際

$$\begin{aligned}(\pi(\sigma)f)(\lambda x) &= f(T_{\sigma^{-1}}(\lambda x)) = f(\lambda T_{\sigma^{-1}}x) \\ &= \lambda^d f(T_{\sigma^{-1}}x) = \lambda^d(\pi(\sigma)f)(x)\end{aligned}$$

である．そこで

$$R_d = \mathbb{C}[V]_d = \{f \in \mathbb{C}[V] \mid f \text{ は斉次 } d \text{ 次多項式}\}$$

と置けば，$\mathfrak{S}_n$ の有限次元ベクトル空間 R_d 上の表現が得られる．これを対称群の d 次**多項式表現**とよぶことにしよう[10)]．

演習 3.13 n 変数 d 次の斉次多項式全体のなすベクトル空間 $R_d = \mathbb{C}[V]_d$ の次元を求めよ．

3.3 不変式

群 G のベクトル空間 $V = \mathbb{C}^n$ 上の行列表現 (ρ, V) を考えよう．以下では，しばしば $\rho(g)v = g \cdot v = gv$ のようにあたかも g 自身が行列であるかのように書き表す．特に表現であることを強調する必要があるときには，$\rho(g)$ などの記号を用いる．

$V = \mathbb{C}^n$ 上の多項式 $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の全体を考え，それを $\mathbb{C}[V]$ と書く．$\mathbb{C}[V]$ には通常の多項式の和・差・積が考えられるが，このように商をとることを除いて四則演算のうち和・差・積が定義されており，結合法則や分配法則などの通常よく用いられる計算法則が成り立つような代数系を**環**と呼んでいる[11)]．そこで $\mathbb{C}[V]$ を V 上の**多項式環**と呼ぶ．

このとき，多項式環 $\mathbb{C}[V]$ 上には G の表現が自然に考えられるのであった．つまり $f(x) \in \mathbb{C}[V]$ に対して $(\pi(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$ と定義するのである．この表現は $\mathbb{C}[V]$ の環構造と両立していることに注意しよう．つまり次が成り立つ．

---

10) この呼称はそれほど一般的ではないかもしれない．実際には R_d は置換表現 V の双対 V^* を考えたとき，V^* の d 次**対称テンソル表現**と呼ばれるものと同型である．

11) 一般に環と呼ぶと，乗法の単位元である 1 を含まないものも考えるのだが，簡単のため，本書では環と言うと乗法の単位元を含んでいるものと約束しておこう．また，$\mathbb{C}[V]$ のようにベクトル空間であって同時に環になっている場合には $\mathbb{C}$ 上の**代数**と言う．環や代数の正確な定義については例えば [47], [51] 等を参考にしてほしい．

$$\pi(g)(\alpha f_1(x)+\beta f_2(x))=\alpha(\pi(g)f_1)(x)+\beta(\pi(g)f_2)(x),$$

$$\pi(g)(f_1(x)\cdot f_2(x))=(\pi(g)f_1)(x)\cdot(\pi(g)f_2)(x).$$

ただし $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ であって $f_1(x), f_2(x)\in\mathbb{C}[V]$ は多項式である．

定義 3.14 $f(x)\in\mathbb{C}[V]$ が G の**不変式**であるとは

$$(\pi(g)f)(x)=f(x)\quad(\forall g\in G)$$

が成り立つときに言う．つまり，不変式とは G の作用によって全く変化しない多項式のことである．$\mathfrak{I}=\mathfrak{I}(V)=\mathbb{C}[V]^G$ で不変式全体のなす集合を表す．

群 G の集合 X への作用を考えたとき，どの G の元によっても全く変化しない点を**不動点**と呼ぶ．

例えば，平面上の回転では回転の中心が不動点であるし，ある直線に関する鏡映では鏡映軸上の点は不動点である．あるいは，3 次元空間における回転では回転軸が不動点になっている．しかし，一方では，例えば平行移動ではすべての点が同じ方向に同じ距離だけ移動するのでそのような不動点は存在しない．

このように，不動点は図形の対称性をよく表しているのだが，その数はあまり多くない．時として，そのような不動点は全く存在しないことさえある．そこで不動点の代わりに図形の対称性や幾何学的性質を反映するものとして考えられたのが不変式なのである．不変式は要するに，空間や図形のある種の性質であって，多項式で表されるようなものであり，たとえ点の配置や図形の形は変わってしまったとしても，群の作用では変わらないような性質である．

少し素朴な例を見てみよう．

例 3.15 $X=[n]=\{1,2,\ldots,n\}$ を n 点の集合とし，その上の置換群として，n 次対称群 $G=\mathfrak{S}_n$ を考える．G は自然に X 上の置換として作用している．もちろんすべての置換が許されるから，G の作用に関する不動点は存在しない．では，不変式はどうであろうか?

不変式を考えるには，X 上の "多項式" とは何かを考えておく必要がある．この場合，X 上の関数 f とは各数字 $1\le k\le n$ に対してその値 $f(k)$ を対応させるような写像のことであって，関数自体ほとんど情報を持っていない．このような状況では，例えば実数の区間上の微分可能な関数と多項式関数の違いといったものはほとんどなくなり，X 上の任意の関数が多項式として許されるべ

きであると考えられる．そこで，以下 X 上のすべての関数のなすベクトル空間を $\mathbb{C}[X]$ で表すことにしよう．

このように考えたとき，$\mathbb{C}[X]$ における G の作用に関する不変式は定数関数しか存在しない．実際，任意の $1 \leq k \leq n$ に対して，置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ であって $\sigma(1) = k$ となるものが存在する．したがって $f(k) = f(\sigma \cdot 1) = \pi(\sigma^{-1})f(1)$ であるが，もし f が不変式なら $\pi(\sigma^{-1})f = f$ だから最後の式は $f(1)$ に等しい．つまり $f(k) = f(1)$ が任意の k に対して成り立つ．

したがって $\mathbb{C}[X]^G = \mathbb{C}1$ である．ただし右辺の 1 はすべての点で 1 という値を取る定数関数を表す．

次に $[n]$ を 2 つの共通部分のない和として $[n] = A \sqcup B$ のように[12] 2 つの空でない集合 A, B に分け，G の部分群 H として，

$$H = \{\sigma \in G \mid \sigma(A) = A, \sigma(B) = B\}$$

を考えよう．つまり H に属する置換は，A, B それぞれの内部でだけ置換を引き起こし，この 2 種類の数を混ぜ合わせないようなものである．もし $\#A, \#B \geq 2$ ならば H の不動点はやはり存在しない．しかし，関数 χ_A を

$$\chi_A(k) = \begin{cases} 1 & (k \in A) \\ 0 & (k \notin A) \end{cases}$$

と定めれば，これは H-不変式である．同様に χ_B を定めると

$$\mathbb{C}[X]^H = \{\alpha\chi_A + \beta\chi_B \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$$

であることが容易に分かる．このように，不変式は $[n]$ が 2 つの部分集合の直和に分かれているという状況を見事に表現することができるのである．

上にあげた例は素朴すぎるので，もう少し面白い不変式の例を考えてみよう．

例 3.16 (2 面体群)　2 面体群 D_n の $V = \mathbb{R}^2$ における自然表現を考えよう．例 3.3 の記号を用いると，D_n の生成元として a, b が取れるのであった．ただし a は原点中心の角度 $2\pi/n$ の回転，b は x 軸に関する線対称移動である．平面 $\mathbb{R}^2$ の x, y 座標をそれぞれ 1 次多項式であると考え，同じ記号で $x, y \in \mathbb{C}[V]$ と書こう．このとき，複素数を用いて $z = x + iy$ と置くと，z は V 上の複素数

---

12) ここで記号 $\sqcup$ は互いに共通部分のない集合の和を表す．$A \sqcup B$ を A と B の**直和**と呼んだり**離散和**と呼んだりする．ベクトル空間の直和とは異なる概念なので混同しないようにしたい．

値の多項式関数になる．そこで，変換 a, b によってこの関数がどのように変化するかを見てみよう．定義より $\pi(a)z(v) = z(a^{-1}v)$ であるが，

$$a^{-1}v = a^{-1}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & \sin(2\pi/n) \\ -\sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n)\, v_1 + \sin(2\pi/n)\, v_2 \\ -\sin(2\pi/n)\, v_1 + \cos(2\pi/n)\, v_2 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \pi(a)z(v) &= z(a^{-1}v) \\ &= \left(\cos\frac{2\pi}{n} v_1 + \sin\frac{2\pi}{n} v_2\right) + i\left(-\sin\frac{2\pi}{n} v_1 + \cos\frac{2\pi}{n} v_2\right) \\ &= e^{-2\pi i/n}(v_1 + iv_2) = e^{-2\pi i/n} z(v) \end{aligned}$$

と計算される．これより $\pi(a)z = e^{-2\pi i/n} z$ であることが分かる．同様にして

$$\begin{cases} \pi(a)z = e^{-2\pi i/n} z \\ \pi(a)\overline{z} = e^{2\pi i/n}\, \overline{z} \\ \pi(b)z = \overline{z} \end{cases} \tag{3.6}$$

を得る．ただし，$\overline{z} = x - iy$ は z の複素共役を表している．

式 (3.6) より，明らかに $R_2 = |z|^2 = z\overline{z}$ および $F_n = (z^n + \overline{z}^n)/2$ は生成元 a, b の作用によって変化しないから，D_n の不変式である．これらを x, y で書き下せば，

$$R_2 = x^2 + y^2, \quad F_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k} y^{2k}$$

が不変式であることが分かる．R_2, F_n の下付きの添え字は多項式としての次数を表している．不変式のうち R_2 は距離を表しているから，これが 2 面体群の作用で保存されることは明らかである．一方 F_n の幾何的意味は一見したところそう明らかではない．

演習 3.17　$n = 3$ のときを考える．

(1) $F_3 = x^3 - 3xy^2$ であることを確かめよ．

(2) F_3 を 1 次式の積に因数分解せよ．

(3) F_3 の一次の因数が表す直線を図示し，それが正 3 角形の対称性とどう関わるかを述べよ．

一般の n に対して F_n は次のように因数分解する．ここの部分の計算は少し慣れが必要だが，自分で補ってみてほしい．

$$\begin{aligned}
2F_n &= z^n + \overline{z}^n \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(z - e^{-(2k-1)\pi i/n}\,\overline{z}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} e^{-(2k-1)\pi i/2n}\left(e^{(2k-1)\pi i/2n} z - e^{-(2k-1)\pi i/2n}\,\overline{z}\right) \\
&= e^{-n^2\cdot\pi i/2n} \prod_{k=1}^{n} \left(e^{(2k-1)\pi i/2n} z - \overline{e^{(2k-1)\pi i/2n}\, z}\right) \\
&= (-i)^n \prod_{k=1}^{n} 2i\left(\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}\,x + \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\,y\right) \\
&= 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}\,x + \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\,y\right).
\end{aligned}$$

最後の因数分解に現れる因子 $\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}\,x + \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\,y$ は，原点を通り x 軸の正の方向となす角度が $-\frac{(2k-1)}{2n}\pi$ の直線を表している．

D_n の部分群 $C_n = \{a^k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$ を考えると，これは巡回群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と同型である．この群の不変式としては，上記 $R_2, F_n^+ = F_n$ の他に $F_n^- = (z^n - \overline{z}^n)/2i$ も不変式になることに注意しよう．$R_2, F_n^\pm$ の間には $(R_2)^n = (F_n^+)^2 +$

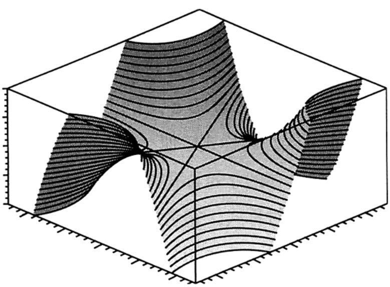


図 3.4 3 次の 2 面体群 D_3 の基本不変式 $F_3(x,y) = x(x^2 - 3y^2)$ のグラフ

$(F_n^-)^2$ という関係式が成り立つ．

不変式は本書の主題であるから，読み進めるうちにもう少し複雑で面白い不変式の例がいくつも見つかるだろう．しかし，話を先に進める前に，不変式の空間が代数系として多項式環から引き継がれた部分環の構造を持つことを示しておこう．そこで前の記号に戻って，G がベクトル空間 V に作用しているとし，不変式の全体を $\mathfrak{I} = \mathbb{C}[V]^G$ で表す．

定理 3.18　$\mathfrak{I}$ は多項式環 $\mathbb{C}[V]$ の部分環である．つまり $\mathfrak{I}$ は加法群であって，積について閉じている．さらに乗法の単位元 1 を含む．

証明　まず，1 は定数関数であり，これが不変式であることは明らかである．

加法に関して閉じていることは，もし $f_1, f_2 \in \mathfrak{I}$ なら

$$\pi(g)(f_1 + f_2) = \pi(g)f_1 + \pi(g)f_2 = f_1 + f_2 \quad (g \in G)$$

であることによって分かる．次に積であるが，$(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x)f_2(x)$ であることに注意して，

$$\begin{aligned}(\pi(g)(f_1 \cdot f_2))(x) &= (f_1 \cdot f_2)(g^{-1}x) = f_1(g^{-1}x) \cdot f_2(g^{-1}x) \\ &= (\pi(g)f_1)(x) \cdot (\pi(g)f_2)(x)\end{aligned}$$

である．ここで $f_1, f_2 \in \mathfrak{I}$ ならば $\pi(g)f_i = f_i \ (i = 1,2)$ であるから，最後の式は $(f_1 \cdot f_2)(x)$ に等しい．つまり $f_1 \cdot f_2 \in \mathfrak{I}$ である．∎

この定理によって $\mathfrak{I} = \mathbb{C}[V]^G$ は環の構造を持つことが分かったので，これを V 上の**不変式環**と呼ぶ．

3.4　対称式

不変式の中でも最も有名なものの 1 つに対称式がある．例 3.2 で考えた対称群 $\mathfrak{S}_n$ の置換表現を $(T, V = \mathbb{C}^n)$ とすると，V 上の多項式環 $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ における $\mathfrak{S}_n$ の不変式が対称式に他ならない．

既に $n = 3, 4$ の場合には具体的な対称式の計算を行ってきたが，ここでは一般 n 変数の基本対称式，冪和対称式，完全対称式などの例をあげておくことにしよう．まず**基本対称式** $\{e_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ は既におなじみであるが，その定義式は

$$\prod_{i=1}^{n}(t-x_i)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e_k t^{n-k}$$

で与えられる．この式の意味は，左辺を展開して t の多項式としてまとめなおすと，その t^{n-k} の係数がちょうど $(-1)^k e_k$ である，という意味である．左辺は t の多項式と見ると，根が $x_1, x_2, \ldots, x_n$ であって最高次の係数が 1 であるような多項式である．それを展開して係数を眺めよということだから，これは要するに**根と係数の関係**を一般的に述べた式に他ならない．実際に展開して係数比較してみると，

$$\begin{aligned}
e_0 &= 1,\\
e_1 &= x_1+x_2+\cdots+x_n,\\
e_2 &= x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\\
e_3 &= x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n,\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

となっていることが分かるだろう．$e_0=1$ は基本対称式とは呼ばないが，このように表しておくのが便利である．

一方，**冪和対称式**は次のように与えられる

$$p_k=\sum_{i=1}^{n}x_i^k\ (k\geq 1),\quad p_0=0.$$

また**完全対称式**は，ある次数 k を決めたとき，その次数を持つような単項式すべての和である．

$$h_k=\sum_{k=j_1+j_2+\cdots+j_n}\prod_{i=1}^{n}x_i^{j_i}\ (k\geq 0),\quad h_0=1.$$

三種の対称式の**母関数**[13]を用いた表示はそれぞれ

$$E(t)=\sum_{k=0}^{n}e_k t^k=\prod_{i=1}^{n}(1+x_i t), \tag{3.7}$$

$$P(t)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k t^{k-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i t}, \tag{3.8}$$

$$H(t)=\sum_{k=0}^{\infty}h_k t^k=\prod_{i=1}^{n}(1-x_i t)^{-1} \tag{3.9}$$

---

13) 母関数と呼ぶ代わりに**生成関数**と呼ぶ場合もある．

となる． この式の意味は，既に基本対称式の定義式のときに見たように，最右辺の式を t の多項式 (あるいは冪級数) として展開して中辺の式と係数比較すると係数が等しいという意味である．基本対称式の母関数 $E(t)$ は既にあげた定義式と符号が異なっているだけだから分かりやすいだろう．冪和対称式や完全対称式の母関数 $P(t), H(t)$ の式では有理関数が現れているが，例えば

$$\frac{1}{1-xt}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k t^k \quad (\text{等比級数の和の公式！})$$

を用いて，無限に続く多項式 (= 冪級数) の形に書きなおす．ここで無限等比級数の和の公式は，収束するかどうかは問題にせず，形式的に掛け算して

$$1=(1-xt)\sum_{k=0}^{\infty}x^k t^k$$

が成り立つということを意味しており，形式的冪級数の間に成り立つ等式と言い表すのが普通である．

母関数は非常に便利なもので，対称式の理論に限らず，数学という舞台のさまざまな場面で活躍している．その基本的なアイデアは，ある種の性質を持つ数とか式を同時に扱って，それらの相互の関係を関数という形で表そうというものである．それを以下，例で説明しよう．

この 3 つの母関数の間の関係を考えるとき，まず簡単に分かるのは次の関係式だろう．

$$E(-t)H(t)=1.$$

さて，この式の左辺を形式的に展開すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}e_k\,(-t)^k\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty}h_\ell t^\ell &= \sum_{k,\ell}(-1)^k e_k h_\ell t^{k+\ell}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\Biggl(\sum_{k+\ell=m}(-1)^k e_k h_\ell\Biggr)t^m \qquad (3.10)\end{aligned}$$

となるが，この式が定数の 1 と等しいので，t^m の係数，つまり上の式の最後の括弧の中身は $m=0$ なら 1 に等しく，$m>0$ ならゼロになる．また，k はもともと $0\le k\le n$ を満たしていたことも考え合わせると，$\{e_k\}$ と $\{h_k\}$ の間の漸化式 $(m>0)$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e_k h_{m-k}=0 \quad (\text{ただし } h_k=0\ (k<0) \text{ とする})$$

を得る．$e_0 = 1$ なので，この式で和を $k = 0$ と $k > 0$ に分け，移項してまとめると

$$h_m = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} e_k h_{m-k}$$

となる．右辺には h_ℓ $(\ell < m)$ と基本対称式 e_k たちしか現れないから，帰納法を用いると，h_m が基本対称式の多項式として表せることが簡単に証明できる．

演習 3.19 $m \leq n$ のとき，

$$e_m = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-1-k} e_k h_{m-k}$$

であることを示せ．これより，基本対称式は完全対称式の多項式で表されることを証明せよ．

次に，冪和対称式の母関数 $P(t)$ と基本対称式の母関数 $E(t)$ との関係を調べよう．その前にほんの少し，微分の公式を復習する．それは，対数関数 $\log t$ の t による微分が $\dfrac{1}{t}$ であること，そして x を定数と思うとき，合成関数の微分法を用いる[14] と

$$\frac{d}{dt} \log(1 - xt) = \frac{-x}{1 - xt}$$

と計算されることの 2 点である．こんなところに微分が? と不思議に思われる読者もいるに違いない．母関数を使う利点は，本来，たくさんの数や式をまとめて計算するという部分にある．そのとき，母関数にまとめられた数や式はもちろん相互に関係があるはずであるが，そのような関係を一番よく炙り出すのがこのような微分あるいは積分という操作なのである．では，微分を使って計算してみよう．

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - x_i t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \log(1 - x_i t) \\ &= -\frac{d}{dt} \log \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i t) = -\frac{d}{dt} \log E(-t) = \frac{E'(-t)}{E(-t)}, \end{aligned}$$

$$\therefore \quad E(-t)P(t) = E'(-t).$$

この最後の式の左辺は (3.10) 式と全く同様にして t の形式的冪級数に表すこと

---

14) 微分というと「変数 x で微分する」という状況設定が専売特許のように用いられるが，ここでは変数 t で微分し，x は定数と考えていることに注意してほしい．

ができる[15]．一方，右辺は

$$E'(t)=\frac{d}{dt}\Big(\sum_{m=0}^{n}e_m t^m\Big)=\sum_{m=0}^{n}me_m t^{m-1}$$

だから

$$E'(-t)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m-1}me_m t^{m-1}$$

である．次数は都合のよいことにここでもちょうど 1 だけずれている．そこで両辺の係数比較をすると次の定理が得られる．

定理 3.20 (ニュートンの公式[16])　n 変数の基本対称式 $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ と冪和対称式 $\{p_1,p_2,\ldots\}$ との間には次の関係式が成り立つ．

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e_k p_{m-k}=0 & (m>n)\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e_k p_{m-k}=(-1)^{m-1}me_m & (m\le n).\end{cases}$$

ただし $p_k=0\ (k\le 0)$ と置く．

注意 3.21　ニュートンの公式として流布している形では，0 番目の冪和対称式を n と解釈する場合が多い．そこで，P_k を $k>0$ では p_k, $P_0=n$, $k<0$ では $P_k=0$ と置くと公式は

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e_k P_{m-k}=0 & (m>n)\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e_k P_{m-k}=(-1)^{m}(n-m)e_m & (m\le n)\end{cases}$$

の形になる．

この定理を使うと，基本対称式は冪和対称式を用いて表せること，逆に冪和対称式は基本対称式で表されることが証明できる．

次の演習は冪級数の扱いに慣れた人でないと難しいかもしれない．例えば，級数の収束はここでは全く気にしないでよいが，その理由はなかなか難しい．本書では深入りしないことにする．詳しくは [47], [17, § VII] を参照してほしい．

演習 3.22　次の等式が成り立つことを以下の方針で示せ．

---

15) ただし $P(t)$ における t の次数は 1 だけずれていることに注意．

16) Newton, Isaac (1643–1727).

$$E(-t) \cdot \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{p_k}{k} t^k\right) = 1.$$

(1) $t = 0$ を代入すると左辺は 1 になることを確かめよ．

(2) 左辺を微分すると，ゼロになることを示せ．

(3) 冪級数を微分してゼロならば定数であることを用いて，上の等式の証明を完結せよ．

3.5 判別式

対称式の応用として，方程式の判別式について考えてみよう．一般に n 次方程式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = 0$$

が与えられたとき，その根を (重複度を込めて) $\xi_1, \ldots, \xi_n$ とする．このとき根の**差積** $\Delta(\xi)$ を次のように定義する．

$$\Delta(\xi) = \Delta(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\xi_i - \xi_j). \tag{3.11}$$

例えば $n = 3$ ならば $\Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_3)$ である．差積 $\Delta(\xi)$ は $\xi_1, \ldots, \xi_n$ を置換することによってほとんど変化しない．実際 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\Delta(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(n)}) = (\pm 1) \cdot \Delta(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

が成り立つ．± 1 は σ によって定まるので，これを σ の**符号**と呼び $\operatorname{sgn}\sigma$ と表す． このことから $\Delta(\xi)^2$ は $\xi_1, \ldots, \xi_n$ の対称式になることが分かる．

対称式の基本定理 2.1 により，対称式はすべて基本対称式の多項式として表すことができる[17)]．一方 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ の基本対称式 e_k は，根と係数の関係から，符号を除いてもとの方程式の係数 a_k/a_0 と一致する．したがって $\Delta(\xi)^2$ は $\{a_k/a_0 \mid 1 \leq k \leq n\}$ の多項式であるが，うまく分母の a_0 を払うことが可能である．すなわち

$$D = a_0^{2n-2} \Delta(\xi_1, \ldots, \xi_n)^2 = a_0^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\xi_i - \xi_j)^2 \tag{3.12}$$

---

17) 基本定理は 3 変数の場合に述べたが，一般に n 変数の場合にも成り立つ．

と置くと，D は $a_0, a_1, \ldots, a_n$ の斉次多項式になる (後述の定理 3.28 参照)．このの $D = D(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ を $f(x)$ の**判別式**と呼ぶ．

定理 3.23　$D=0$ であることと $f(x)=0$ が重根を持つことは同値である．

証明　$a_0 \neq 0$ としてよいだろう[18]．すると $D=0 \iff \varDelta(\xi)=0$ だが，$\varDelta(\xi)=0$ は差積のある因子 $\xi_i - \xi_j$ がゼロ，つまり $\xi_i = \xi_j$ が成り立つことを意味している． ∎

演習 3.24　2 次方程式 $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ の判別式が $D = a_1^2 - 4a_0a_2$ であることを確かめよ．

定理 3.25　$f'(x)$ を多項式 $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ の微分とし，$\xi_1, \ldots, \xi_n$ を $f(x)=0$ の n 個の根とする．このとき判別式は

$$D = (-1)^{n(n-1)/2} a_0^{n-2} f'(\xi_1) f'(\xi_2) \cdots f'(\xi_n)$$

で与えられる．

証明　$\xi_1, \ldots, \xi_n$ が $f(x)=0$ の根なので，$f(x)$ は

$$f(x) = a_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_n)$$

と因数分解する．この式と積の微分の公式より

$$f'(x) = a_0 \sum_{i=1}^{n} (x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_n)/(x-\xi_i)$$

である．右辺の和の各項は $(x-\xi_i)$ の因子を除いた残りの因子の積である．この微分の式に $x = \xi_j$ を代入すると和のうちの $(x-\xi_j)$ を含んでいる $(n-1)$ 個の項は消えて $f'(\xi_j) = a_0 \prod_{1 \le i \le n, i \neq j} (\xi_j - \xi_i)$ となることが分かる．この微分の式と判別式を差積を用いて

$$D = a_0^{2n-2} \varDelta(\xi)^2 = (-1)^{n(n-1)/2} a_0^{2n-2} \prod_{i \neq j} (\xi_i - \xi_j)$$

と書き直した式を比較すると，証明すべき式が得られる． ∎

例 3.26　3 次方程式の判別式を求めてみよう．一般の 3 次方程式ではかな

---

18) 本来判別式は斉次方程式 $F(x,y) = \sum_k a_k x^{n-k} y^k = 0$ に対して定義されるべきものである．もしそのように考えるならば，$a_0 = 0$ のときにも定理の主張は意味を持ち，射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の根の重根条件が $D=0$ で与えられることが分かる．射影直線については後述する．

り複雑になるので，2 次の項がない方程式 $x^3-ax-b=0$ を考える．$f(x)=x^3-ax-b$ と置くと $f'(x)=3x^2-a$ である．そこで 3 つの根を ξ_1,ξ_2,ξ_3 とすれば，上の定理より

$$
\begin{aligned}
(-1)^3D &= f'(\xi_1)f'(\xi_2)f'(\xi_3) = (3\xi_1^2-a)(3\xi_2^2-a)(3\xi_3^2-a)\\
&= 27\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2 - 9(\xi_1^2\xi_2^2+\xi_2^2\xi_3^2+\xi_3^2\xi_1^2)a + 3(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)a^2 - a^3\\
&= 27b^2 - 9\left\{(\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1)^2 - 2\xi_1\xi_2\xi_3(\xi_1+\xi_2+\xi_3)\right\}a\\
&\qquad + 3\left\{(\xi_1+\xi_2+\xi_3)^2 - 2(\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1)\right\}a^2 - a^3\\
&= 27b^2 - 9a^2\cdot a + 6a\cdot a^2 - a^3 = 27b^2 - 4a^3
\end{aligned}
$$

だから，判別式は $D=4a^3-27b^2$ である．ただし $\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$ であることを用いた．

これを別の方法で確かめてみよう．3 次式のグラフ $y=f(x)$ を考えると，極値は $f'(x)=3x^2-a=0$ において取る．極値において重根を取るためには

$$0 = f\left(\sqrt{a/3}\right) = (a/3)\sqrt{a/3} - a\sqrt{a/3} - b = -(2a/3)\sqrt{a/3} - b$$

でなければならない．移項して両辺を自乗すると

$$\frac{4a^2}{9}\cdot\frac{a}{3} = b^2, \quad 4a^3 - 27b^2 = 0$$

が分かる．最後の式の左辺はちょうど判別式に一致している!

演習 3.27　一般の 3 次式 x^3+Ax^2+Bx+C は $X=x-A/3$ と変数変換することにより X^3-aX-b の形になることを示せ．

定理 3.28　多項式 $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_kx^{n-k}$ の判別式 D は係数 $a_0,a_1,\dots,a_n$ の斉次多項式である．

証明　$\xi_1,\dots,\xi_n$ の基本対称式を $\{e_k\}_{k=1}^n$ と書こう．同様に $\xi_1,\dots,\xi_{n-1}$ の基本対称式を $\{e'_k\}_{k=1}^{n-1}$ と書いておく．すると $e_k=\xi_n e'_{k-1}+e'_k$ が成り立っている．

さて，差積の自乗 $\Delta(\xi)^2$ を基本対称式で表したとき，基本対称式の次数の一番高い項を $e_1^{m_1}\dots e_n^{m_n}$ としておく．このとき

$$e_1^{m_1}\dots e_n^{m_n} = (\xi_n+e'_1)^{m_1}(\xi_n e'_1+e'_2)^{m_2}\dots(\xi_n e'_{n-1})^{m_n}$$

であって，$\xi_n^{m_1+\dots+m_n}$ の係数は $1^{m_1}(e'_1)^{m_2}\dots(e'_{n-1})^{m_n}$ となっている．したがって ξ_n の最高次の次数と，一番高い次数を持つ基本対称式の項の次数が一致する．

差積においては ξ_n の最高次の次数は $(2n-2)$ 次であるから，$e_k=(-1)^k a_k/a_0$ の分母の a_0 は a_0^{2n-2} を掛けることによってすべて払うことができる．∎

差積については行列式を用いた面白い表示がある．以下，演習問題の形で紹介しておくが，行列式に不慣れな読者は次の章に読み進むのがよいだろう．

差積 $\Delta(\xi)=\prod_{1\le i<j\le n}(\xi_i-\xi_j)$ は**ファンデルモンドの行列式**[19] と呼ばれる行列式で表すことができる．

$$\Delta(\xi)=(-1)^{n(n-1)/2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \cdots & \xi_n \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \cdots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{n-1} & \xi_2^{n-1} & \xi_3^{n-1} & \cdots & \xi_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{3.13}$$

この式については例えば [31] あるいは [41] を参照してほしい．

演習 3.29　差積の表示式 (3.13) を用いて

$$\Delta(\xi)^2=\det\left(\frac{1-(\xi_i\xi_j)^n}{1-\xi_i\xi_j}\right)_{1\le i,j\le n}$$

であることを示せ．

演習 3.30　前演習と同様にして

$$\Delta(\xi)^2=\det\Big(p_{i+j-2}\Big)_{1\le i,j\le n}$$

であることを示せ．ただし $p_k=\xi_1^k+\cdots+\xi_n^k$ は冪和対称式である．

---

[19] Vandermonde, Alexandre-Thophile (1735–1796).

第 II 部

平面上の幾何学と変換群

第 4 章　平面の合同変換と不変式

この章では，幾何学と不変式の間の関係を調べよう．そのため，前章では有限群を主に扱ったが，この章では連続群 (行列群) を扱うことになる．しかし，連続群と聞いて恐れをなすことはない．群の概念にある程度馴染んでしまえば，行列群と有限群の間には本質的な差異はあまりないことに気がつくだろう．むしろそれらを統一的に扱えること，それが数学が持っている大きな特徴の 1 つである．

4.1　等長変換

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ を**ユークリッド平面**とする．ユークリッド平面と呼ぶときには，単なる 2 つの実数の組全体を考えるのではなく，そこには距離とか，角度，線分の長さ，面積などといった諸々の量が定まっていることを意味する．

$p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\|p\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ と置き，これを p の**絶対値**，または**ノルム**と呼ぶ．ノルムというといかめしく聞こえるが，ピタゴラスの定理 (あるいは三平方の定理) を思い出すと，要するに $\|p\|$ は，座標原点と点 $p = (x,y)$ の間の距離である．したがって $p, q \in \mathbb{R}^2$ のとき，$\|p - q\|$ は p と q の間の**ユークリッドの距離**を表している．

定義 4.1　$\mathbb{R}^2$ 上の**等長変換**とは，写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ であって，

$$\|f(p) - f(q)\| = \|p - q\| \tag{4.1}$$

が成り立つようなもののことを言う．等長変換で写りあうような図形は合同なので，等長変換は**ユークリッド合同変換**とも呼ばれる．

注意 4.2　空間 X 上の**変換**とは，写像 $f : X \to X$ であって，X のしかるべ

き性質を保つようなものを呼ぶ[1]．本書では，変換を全単射と仮定することが多い．この場合，逆写像 f^{-1} もまた f と同じ性質を保つとする．等長変換の場合にはすぐ後に見るように，f は自動的に全単射写像になり，その逆写像はまた等長変換になる (ので，定義ではこれらの性質は要求しなかった).

あまり誉められたことではないが，この節では，$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ と複素平面 $\mathbb{C} = \{z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ をしばしば同一視することにする．このように同一視して考えると，等長変換 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は複素平面上の複素数値関数と思うことができる．今まで実数値関数しか考えた経験がない人には，複素数値関数というとむつかしく聞こえるかもしれないが，実は複素数の関数を用いるのはとても便利なのである．例えば，複素数を用いて代表的な等長変換の例を書いてみよう．

例 4.3 (平行移動)　複素数 $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して $f(z) = z + v$ を考えてみよう．もちろん $v = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ も複素数である．すると

$$f(x + yi) = (x + yi) + (a + bi) = (x + a) + (y + b)i$$

だから，これを座標で書くと，$(x,y) \to (x + a, y + b)$ となり，平面上で (a,b) だけ平行移動することに相当する (図 4.1).

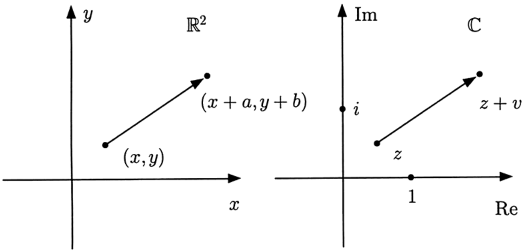


図 4.1　実平面と複素平面の平行移動

このように，平行移動は複素数を使うと単なる足し算で表されてしまう．もちろん，逆変換は $f^{-1}(z) = z - v$ であって，引き算になる．

例 4.4 (回転)　複素平面において，原点中心の角度が φ の回転を複素数値関数を用いて表すと $f(z) = e^{i\varphi} z$ となる．実際，複素数の極座標表示を $z = re^{i\theta}$

1) 変換という言葉はもっと広い意味に使われることもあるので注意が必要である．

と書いておくと，

$$f(z)=e^{i\varphi}z=r\,e^{i\varphi}e^{i\theta}=r\,e^{i(\theta+\varphi)}$$

となるから，$e^{i\varphi}$ を掛けることは，複素数 z の偏角を φ だけ増やすことにあたる．これを実平面上で座標を用いて表すとよくご存じのように

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

となる．$f(z)=e^{i\varphi}z$ という表示の仕方を考えると，その簡便さに驚かされる．逆変換はこの場合，角度が $-\varphi$ の回転であるから $f^{-1}(z)=e^{-i\varphi}z$ となる．

さて，回転移動の中心はなにも原点ばかりとは限らない．では一般の点 $a\in\mathbb{C}$ を中心とする回転はどのように表せばよいのだろうか？ これには，**変換の合成**という考え方を用いるのが便利である．まず，点 a を原点に平行移動する．しかる後，原点を中心に角度 φ だけ回転し，もう 1 度 a だけ平行移動してやる．このようにして，点 a を中心とする角度 φ の回転が得られることは明らかであろう．これを式で表すと

$$\begin{aligned}f(z)&=e^{i\varphi}(z-a)+a\\&=e^{i\varphi}z+a(1-e^{i\varphi})\end{aligned}\tag{4.2}$$

となる．この式を見ると意外なことに，点 $a\in\mathbb{C}$ を中心とした回転は，原点を中心にまず回転しておいて，その後 $a(1-e^{i\varphi})$ だけ平行移動するのと同じであることが分かる．

演習 4.5　平面上の点 $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ を中心とする角度 φ の回転移動を，実座標を用いて表せ．

最後に鏡映について考えよう．

例 4.6 (鏡映)　複素平面において実軸に関する線対称移動は，複素共役を用いて $f(z)=\overline{z}$ と表される．線対称移動を鏡映とも呼ぶのであった．以後，この短い用語，鏡映を使うことにしよう．

一般に，複素平面上の点 $u\in\mathbb{C}$ が与えられたとき，u を通り，実軸の正の方向となす傾きが θ の直線 $\ell=\{e^{i\theta}t+u\mid t\in\mathbb{R}\}$ に関する鏡映を考えよう．この鏡映を複素数値関数で表すとどうなるだろうか？ これをやはり回転のときと同じように考えてみよう．回転のときは回転の中心を原点に移動して考えた．そ

こで，鏡映の場合には鏡映の軸 ℓ を実軸に重ねるとよいだろう．それには，u だけ戻って原点を通る直線にし，さらにそれを角度 $-\theta$ だけ回転すればよい．そのような変換は $g(z)=e^{-i\theta}(z-u)$ と書ける．したがって $f(z)=g^{-1}(\overline{g(z)})$ が求める鏡映である．実軸に関する鏡映をしたあと，g の逆変換によって戻すことも忘れてはいけない．これをまとめて式で表すと，

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{i\theta}\cdot\overline{e^{-i\theta}(z-u)}+u \\ &= e^{2i\theta}\cdot\overline{z}+e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}u-\overline{e^{-i\theta}u}\right) \end{aligned} \tag{4.3}$$

となる．$e^{-i\theta}u-\overline{e^{-i\theta}u}$ の部分は純虚数であることに注意しよう．

演習 4.7　複素平面上で実軸に関する鏡映をした後，実軸に沿った平行移動を行う変換 $f(z)=\overline{z}+\alpha\ (\alpha\in\mathbb{R})$ を実軸を軸とする**滑り鏡映**と呼ぶ．点 $u\in\mathbb{C}$ を通り傾きが θ の直線 $\ell=\{e^{i\theta}t+u\mid t\in\mathbb{R}\}$ を軸とする滑り鏡映は

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{i\theta}\cdot\left(\overline{e^{-i\theta}(z-u)}+\alpha\right)+u \\ &= e^{2i\theta}\cdot\overline{z}+e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}u-\overline{e^{-i\theta}u}+\alpha\right) \end{aligned}$$

と表されることを示せ．一般に $h(z)=e^{2i\theta}\,\overline{z}+e^{i\theta}(\alpha+\beta i)\ (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ となるような変換を考えると，これが鏡映になるのはいつか? また滑り鏡映になるのはいつだろうか?

平行移動や，回転，鏡映などを合成するとどうなるだろうか? 既に一般の点を中心とする回転が，原点中心の回転と平行移動の合成になることを見た．では，鏡映を合成するとどうなるかをしらべてみよう．合成する 2 つの鏡映の軸が平行でないときと平行なときに場合分けして考える．

まず鏡映の軸が平行でないときは，2 つの軸は唯一点で交わる．その点を $u\in\mathbb{C}$ とすると，2 つの軸は

ℓ: u を通り，実軸の正の向きとなす角が θ の直線

m: u を通り，実軸の正の向きとなす角が φ の直線

と表すことができる．さて，軸が ℓ の鏡映を f，軸が m の鏡映を g と表すと，

$$f(z)=e^{2i\theta}\,\overline{z}+u-e^{2i\theta}\,\overline{u},\quad g(z)=e^{2i\varphi}\,\overline{z}+u-e^{2i\varphi}\,\overline{u}$$

である．したがって，その合成は

$$\begin{aligned} f\circ g(z) &= f(g(z)) \\ &= e^{2i\theta}\,\overline{(e^{2i\varphi}\,\overline{z}+u-e^{2i\varphi}\,\overline{u})}+u-e^{2i\theta}\,\overline{u} \\ &= e^{2i(\theta-\varphi)}z+e^{2i\theta}\,\overline{u}-e^{2i(\theta-\varphi)}u+u-e^{2i\theta}\,\overline{u} \\ &= e^{2i(\theta-\varphi)}z+u(1-e^{2i(\theta-\varphi)}) \end{aligned}$$

となる．式 (4.2) により，これは u を中心とする角度が $2(\theta-\varphi)$ の回転である．

つまり 2 つの鏡映の合成は回転となり，その回転の中心は 2 つの鏡映軸の交点である (図 4.2)．実際，鏡映によって軸上の点は動かないので，2 つの鏡映軸の交点は鏡映の合成によっても不動である．この点が回転の中心になることは理解しやすいであろう．

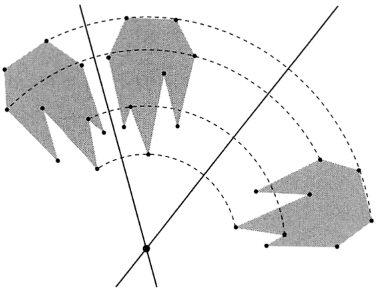


図 4.2　鏡映の合成は回転

次に，軸が平行な場合を考えよう．このときは直線の傾きが等しいので，2 つの軸 ℓ, m は，実軸の正の向きとなす角が θ で，ℓ は u を通り，m は v を通るとする．軸が ℓ の鏡映を f，軸が m の鏡映を g と表すと，上と同様に，

$$f(z)=e^{2i\theta}\,\overline{z}+u-e^{2i\theta}\,\overline{u}, \quad g(z)=e^{2i\theta}\,\overline{z}+v-e^{2i\theta}\,\overline{v}$$

となって，その合成は

$$\begin{aligned} f\circ g(z) &= f(g(z)) \\ &= e^{2i\theta}\,\overline{(e^{2i\theta}\,\overline{z}+v-e^{2i\theta}\,\overline{v})}+u-e^{2i\theta}\,\overline{u} \\ &= z+(u-v)-e^{2i\theta}(\overline{u}-\overline{v}) \\ &= z+e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}(u-v)-\overline{e^{-i\theta}(u-v)}\right) \end{aligned}$$

である．これは平行移動であるが，最後の式の括弧の中は純虚数であることに注意すると，平行移動の向きは直線の方向と垂直な向きであることが容易に分かる．直線間の距離を d と書いておくと，$u = v \pm i e^{i\theta} d$ と取れる[2)]から，このときは

$$f \circ g(z) = z \pm 2 i e^{i\theta} d$$

となって，鏡映の軸とは垂直な向きに，距離 $2d$ だけ平行移動することになる．

上の計算は，角度や，軸，平行移動の距離などを正確に出したかったので少し詳しく計算したが，同様の計算によって，平行移動，回転，鏡映，あるいは滑り鏡映を有限回合成したものは結局

$$f(z) = e^{i\theta} z + v \quad \text{または} \quad f(z) = e^{i\theta} \overline{z} + v$$

の形に書けることが分かるだろう．したがって，これらは等長変換の合成として，もちろん等長変換になるのだが，逆に次の定理が成り立つ．

定理 4.8 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ と同一視して考える．このとき $\mathbb{C}$ 上の等長変換 $f(z)$ は，複素数 $v \in \mathbb{C}$ と長さが 1 の複素数 $u \in \mathbb{C}$ $(|u| = 1)$ を用いて

$$f(z) = \begin{cases} u z + v & \text{または} \\ u \overline{z} + v \end{cases}$$

と表すことができる．逆に，このような z または $\overline{z}$ の 1 次式で表される写像は等長変換である．

この定理を証明する前に，まず次の補題を示す．

補題 4.9 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が $0, 1, i$ の 3 点をそれぞれ固定するような等長変換ならば，それは恒等写像である．

証明 $z \in \mathbb{C}$ を任意の点とし，$w = f(z)$ とする．すると，$f(0) = 0$ に注意して，f が等長変換であることを用いると

$$\|w\| = \|f(z) - f(0)\| = \|z - 0\| = \|z\|$$

であることが分かる．$\|w\|^2 = |w|^2 = w\overline{w}$ などから $w\overline{w} = z\overline{z}$ が成り立つ．同様にして $|w-1|^2 = |z-1|^2$ が分かるが，これより

---

2) i を掛けることは角度 $\pi/2$ の回転であったが，$\pm i$ は回転角が $\pm\pi/2$ のどちらかによって符号を変える．

$$(w-1)(\overline{w}-1)=(z-1)(\overline{z}-1),$$

$$w\overline{w}-(w+\overline{w})+1=z\overline{z}-(z+\overline{z})+1$$

だが，既に得た式 $w\overline{w}=z\overline{z}$ と合わせて，$w+\overline{w}=z+\overline{z}$ を得る．つまり w と z の実部は等しい．

次に $|w-i|^2=|z-i|^2$ を用いて同様に計算すると $w-\overline{w}=z-\overline{z}$, つまり w と z の虚部が等しいことが分かる．したがって $f(z)=w=z$ であり，f は恒等変換である．∎

複素数を用いて述べているが，もちろん，この補題は，ユークリッド平面上の (0,0), (0,1), (1,0) を固定するような等長変換は恒等写像であるということを意味している．

定理 4.8 の証明　f を等長変換とする．まず $f(0)$ を平行移動 T を用いて原点に写す．すると，$T\circ f(0)=T(f(0))=0$ だから，合成変換 $f'=T\circ f$ は原点を原点に写すことになる．もちろん f' も等長変換である．次に $w=f'(1)$ を考えよう．

$$|w|=\|w-0\|=\|f'(1)-f'(0)\|=\|1-0\|=1$$

だから w は絶対値が 1 の複素数である．したがって，原点中心の回転によって 1 に重ねることができる．この回転移動を R と書けば，$f''=R\circ f'$ は原点および 1 を固定する．これでもう戦略はお分かりだろう．残るは i のみである．複素平面において，原点からの距離が 1 であって，1 からの距離が $\sqrt{2}$ のところにあるような点は 2 点あり，$\pm i$ である．したがって $f''(i)=\pm i$ であるが，必要なら，複素共役をとることにして，S を複素共役または恒等変換とすると $S\circ f''(i)=i$ とできる．S は (複素共役であっても恒等変換であっても) $0, 1$ を固定するので，$f'''=S\circ f''$ と置くと f''' は $0, 1, i$ を固定する等長変換である．したがって補題 4.9 により $f'''=S\circ R\circ T\circ f$ は恒等変換になる．このことから $f=T^{-1}\circ R^{-1}\circ S^{-1}=T^{-1}\circ R^{-1}\circ S$ であって，f は複素共役 (または恒等変換)，原点中心の回転，平行移動の合成になることが分かる．このような f が z または $\overline{z}$ の 1 次式で表されることは既に確認した．

逆に $f(z)=uz+v$ と表されたとしよう．ここで u は絶対値が 1 の複素数である．すると

$$\begin{aligned}\|f(z)-f(w)\| &= \|(uz+v)-(uw+v)\| \\ &= \|u(z-w)\| = |u|\cdot|z-w| = \|z-w\|\end{aligned}$$

だから f は等長変換である．$f(z)=u\bar{z}+v$ の場合も同様である． ∎

つまり，ユークリッドの距離を保つような変換，つまり等長変換は，われわれのよく知っているユークリッドの合同変換の合成で書けてしまうのである．しかも上の定理の証明を眺めれば，平行移動，原点を中心とする回転，実軸に関する鏡映の 3 種類の変換を高々 1 回ずつ合成することで任意の等長変換を表すことができることが分かる．

4.2 合同変換群の不変式

前節では，ユークリッド平面上の合同変換 (等長変換) にはどのようなものがあるか，とか，合同変換の合成はどのようになるか，といった合同変換個々の性質を，例を交えながら考えてきた．この節では，合同変換全体を 1 つの代数系，つまり合同変換のなす群として考えたい．

定義 4.10 $E_2 = E(\mathbb{R}^2)$ で平面上のユークリッド合同変換 (等長変換) の全体を表す．写像の合成を積として，E_2 は自然に群をなす．これを (2 次元) **合同変換群**または**運動群**と呼ぶ．

合同変換は線型変換ではないが，非常に線型変換に近い．実際，複素数を使わずに実座標でこの変換を書き表してみると，

$$f(x,y)=(x',y'), \quad \begin{cases} x' = (\cos\theta)x \mp (\sin\theta)y + a \\ y' = (\sin\theta)x \pm (\cos\theta)y + b \end{cases} \quad (\text{複号同順})$$

と書ける．ただし $u=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta, v=a+ib$ と置いた．このような線型変換と平行移動を合成した変換を一般に**アフィン変換**と呼んでいる．つまり，アフィン変換とは次のように表される変換のことである．

$$f(v)=Av+u \quad (A\in M_2(\mathbb{R}), \det A \neq 0; u\in\mathbb{R}^2).$$

合同変換では，係数 A の部分に特殊な制約が課されており，それによって『距離』を不変にするという性質を持っている．つまり，合同変換群はアフィン変換群の部分群である．

さて，合同変換群 E_2 の元で原点を固定するようなもの全体を考えると，それは E_2 の部分群になる．この部分群を $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ で表し，2 **次直交群**と呼ぶ．

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \{f \in E_2 \mid f(0) = 0\}$$
$$= \{\text{ 原点を中心とする回転 }\} \cup \{\text{ 原点を通る直線を軸とする鏡映 }\}.$$

また $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ を行列表示すると，

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ u_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

と表されており，これをまとめて

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid {}^t g g = g\, {}^t g = 1_2 \ (\text{単位行列})\}$$

と書き表すこともできる．最後に現れた式 ${}^t g g = g\,{}^t g = 1_2$ は直交行列の定義式であって，g は直交行列になる．つまり，直交群とは直交行列全体のなす群のことである (§1.5.2 参照).

合同変換群 E_2 はこの直交群 $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ と，平行移動のなす部分群 $\mathbb{R}^2$ によって生成される．$\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ と $\mathbb{R}^2$ は可換ではないが，$\mathbb{R}^2$ は E_2 の正規部分群になっており，$E_2 = \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ は半直積群である．

さて，合同変換群が距離を不変にし，逆に距離を不変にするものは合同変換に限られることが示された．では合同変換によって保存される幾何学的な量は距離だけであろうか?

もちろん，距離が不変なら，それを 2 乗したり，2 倍したりしてもそれらは不変量であり，不変量をいくつか引いたり足したりしてもやはり不変量である．しかし，このように距離を何倍かしたり，冪乗したり，その和を考えたりしたものは新しい不変量とは言えない．つまり，上の問いは，合同変換の不変量は本質的に距離しかないのだろうか，ということである．

この問題を考えるために，次のような設定を考えよう．一般にユークリッド平面上の m 個の点 $p_1, \cdots, p_m$ をとり，それら m 個の点によって値が決まるような関数 $F(p_1, \cdots, p_m)$ を考える．F が合同変換によって不変であるとは，

$$F(g \cdot p_1, g \cdot p_2, \cdots, g \cdot p_m) = F(p_1, \cdots, p_m) \quad (\forall g \in E_2)$$

が成り立つことである．そこで $(\mathbb{R}^2)^m = \mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2$ (m 回の直積) への合同変換群 E_2 の作用を $g \cdot (p_1, \cdots, p_m) = (g \cdot p_1, g \cdot p_2, \cdots, g \cdot p_m)$ で決めよう．すると不変式の全体は $V = (\mathbb{R}^2)^m$ と置いて

$$\mathfrak{I} = \{F \in \mathbb{C}[V] \mid F(g \cdot (p_1, \ldots, p_m)) = F(p_1, \ldots, p_m) \ \ (\forall g \in E_2)\}$$

と書ける．既に注意したように，$\mathfrak{I}$ は，積と和，定数倍に関して閉じており，不変式環と呼ばれるのであった．

定理 4.11　合同変換群 E_2 の $V = (\mathbb{R}^2)^m$ 上の不変式環 $\mathfrak{I}$ は

$$\{(p_i - p_j) \cdot (p_k - p_l) \mid 1 \leq i, j, k, l \leq m\}$$

で生成される．ただし $p \cdot q$ はユークリッド内積である．

証明　最初に平行移動を行うことにより，

$$(p_1, p_2, \ldots, p_m) \mapsto (p_1 - p_m, p_2 - p_m, \ldots, 0)$$

と移すことができるが，平行移動によって不変式は変化しないから，$F \in \mathfrak{I}$ に対して

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_m) = F(p_1 - p_m, p_2 - p_m, \ldots, 0)$$

となり，右辺の形から F は結局 $p_1 - p_m, p_2 - p_m, \ldots, p_{m-1} - p_m$ の多項式であることが分かる．これら $p_k - p_m$ には直交群 $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ が作用しているので，結局 $(\mathbb{R}^2)^{m-1}$ への $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ の作用の不変式を決めればよいことが分かる．そこで最初から $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright (\mathbb{R}^2)^m$ の不変式を考えることにする．このとき，

$$u_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と置くと，u_θ および s は直交群 $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ を生成するから，この 2 つの元によって不変な多項式を考えればよい．さて $z = x + iy$ とすれば，任意の x, y の多項式は $z, \overline{z}$ の多項式であり，しかも $z, \overline{z}$ は u_θ の固有ベクトルとなっている．実際，簡単な計算によって

$$u_\theta z = e^{i\theta} z, \quad u_\theta \overline{z} = e^{-i\theta} \overline{z}; \quad sz = \overline{z}, \quad s\overline{z} = z$$

であることが確かめられる．したがって $\{z_j, \overline{z_j} \mid 1 \leq j \leq m\}$ の多項式で u_θ 不変なものは $z_j \overline{z_k}$ で生成されることが分かる[3]．

---

[3] フーリエ級数との類似に注意せよ．

次に s について考える．既に u_θ 不変な多項式は $z_j\overline{z_k}$ たちによって生成されることが分かっているが，

$$z_j\overline{z_k} = \frac{1}{2}\Big((z_j\overline{z_k} + \overline{z_j}z_k) + (z_j\overline{z_k} - \overline{z_j}z_k)\Big)$$

なので，不変式を $z_j\overline{z_k} \pm \overline{z_j}z_k$ によって展開し，その s による固有値を見ればよい．$p_j = (x_j, y_j) \leftrightarrow z_j = x_j + iy_j$ と書いておくと，

$$z_j\overline{z_k} + \overline{z_j}z_k = 2(x_jx_k + y_jy_k) = 2p_j \cdot p_k$$

は s によって不変である．一方，$z_j\overline{z_k} - \overline{z_j}z_k$ のタイプの方は，s の作用によって (-1) 倍されるから，不変式においてこの形の多項式は 2 つづつペアになって現れなければならず，

$$\begin{aligned}(z_j\overline{z_k} - \overline{z_j}z_k)(z_a\overline{z_b} - \overline{z_b}z_a) &= -4(-x_jy_k + y_jx_k)(-x_ay_b + x_by_a) \\ &= -4\det{}^t(p_j, p_k)\cdot\det(p_a, p_b) \\ &= -4\begin{vmatrix} p_j\cdot p_a & p_j\cdot p_b \\ p_k\cdot p_a & p_k\cdot p_b \end{vmatrix}\end{aligned}$$

となり，結局 $p_j \cdot p_k$ の形の多項式で表されることが分かる．■

この定理より，合同変換群の不変式環は，2 点間の距離の平方 $\|p_i - p_j\|^2$ と内積 $(p_i - p_j)\cdot(p_k - p_\ell)$ で生成されるということが分かる．内積は，$(p_i - p_j)$ と $(p_k - p_\ell)$ がなす角を θ と書くと，よく知られているように

$$(p_i - p_j)\cdot(p_k - p_\ell) = \|p_i - p_j\|\|p_i - p_j\|\cos\theta$$

のように，距離と角度を用いて表すことができる．つまり

> 合同変換で移り合うことによって変らないような図形の性質 (座標の多項式で表されるような性質) は，すべて距離と角度を用いて表すことができる．

今はユークリッド平面の場合を説明したが，これが高次元になっても話は同じである．n 次元合同変換群 $E_n = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ は，原点を通る直線を軸とする回転，および原点を通る超平面に関する鏡映によって生成される n 次直交群 $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ と，平行移動のなす群 $\mathbb{R}^n$ の半直積である．合同変換群 E_n の $\mathbb{R}^n$ への自然な作用を次のように定義する．

$$(h,v)\cdot p = h\cdot p + v \quad (g=(h,v)\in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})\ltimes \mathbb{R}^n, p\in \mathbb{R}^n).$$

さらに $(\mathbb{R}^n)^m = \mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n$ (m 回の直積) への E_n の作用を

$$g\cdot(p_1,\cdots,p_m) = (g\cdot p_1, g\cdot p_2,\cdots, g\cdot p_m)$$

で決めよう．すると形式的には全く同じ定理が成立する．

定理 4.12　合同変換群 E_n の $V=(\mathbb{R}^n)^m$ 上の不変式環は

$$\{(p_i-p_j)\cdot(p_k-p_l)\mid 1\le i,j,k,l\le m\}$$

で生成される．ただし $p\cdot q$ はユークリッド内積である．

この定理は，やはり平行移動を用いて，直交群の不変式環を決定する問題に帰着される．その直交群による不変式環が内積によって生成されることをきわめて明快な形で主張したのがワイル[4)]の『古典群』([19]) であった．1939 年のことである．興味を持った読者はぜひ原典にあたっていただきたい．

4.3　2次曲線

前節では，平面上の点配置の合同変換群によって不変な性質のうち，本質的なものは 2 点間の距離や 3 点間の角度であり，他の性質はすべてこれらを用いて表されることを見た．しかし有限個の点の配置ではせいぜい多角形しか構成できない．というよりも，点配置はいくつかの直線のなす多角形のような図形を意味すると解釈したほうがよいであろう．

そこで，この節では点配置とは異なる図形の中で一番簡単なものとして平面2次曲線の合同類について考えてみることにしよう．2次曲線と書くと小難しく聞こえるかもしれないが，要するにそれらは円・楕円・双曲線・放物線などの総称である．これらの方程式を書いてみると，

---

4) Weyl, Hermann Klaus Hugo (1885–1955). ワイルは 1900 年頃に始まる現代数学の黎明期にあってその後の数学の発展の基礎を築いた幾人かの数学者たちの一人である．当時，物理学において新しく勃興した量子力学との関係から表現論の重要性を見抜き，不変式論再生への道筋を付けた．また数理哲学やリーマン面の研究など多岐にわたる分野に影響を与えた．日本人最初のフィールズ賞受賞者である小平邦彦をプリンストン高等研究所に招聘したのもワイルであった．ワイルの人柄については小平邦彦のエッセイ [28] に見事に描き出されている．

円：　$x^2+y^2=R^2$ ($R>0$ は半径),

楕円：　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,$

双曲線：　$a^2x^2-b^2y^2=1$ ($ax\pm by=0$ は漸近線),

放物線：　$y=ax^2$

となり，どれも x,y の 2 次式で書けるから 2 次曲線と呼ばれる (図 4.3).

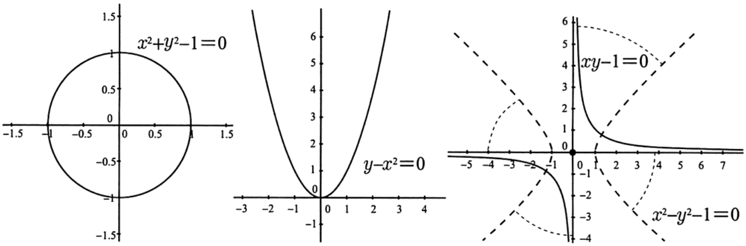


図 **4.3**　円・放物線・双曲線

しかし，たとえ円であっても，中心が原点でない場合には，方程式は $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ となって上にあげた方程式の形はしていない．また，方程式 $xy=1$ はよく知られた反比例の式で，漸近線が x 軸と y 軸であるような直角双曲線を表しているが，上にあげた双曲線の方程式とは異なる．方程式 $(x+y+1)(x-y+1)=0$ は 2 本の直線 $x\pm y+1=0$ の和を表すし，$(x+y+1)^2=0$ は直線 $x+y+1=0$ が二重に重なった，1 本の直線 (**二重直線**) を表している．変わったところでは，$(x-a)^2+(y-b)^2=0$ は実平面上では 1 点 (a,b) のみを表している．

そのようなわけで，円・楕円・双曲線・放物線のみを 2 次曲線と呼ぶのは不便であるし，2 次式で表されるというのなら一般の 2 次式を考える方が筋がよさそうである．そこで**一般平面 2 次曲線**を方程式

$$F(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 \tag{4.4}$$

で表される曲線であると定義しよう．ここで $a,b,\cdots,f\in\mathbb{R}$ は係数であるが，後の計算の都合により b,d,e はあらかじめ 2 倍してある．

ただし，任意に係数を与えると，上で述べたように直線の和や二重直線になることもあるし，例えば $x^2+y^2+1=0$ のように図形としては空集合になってしまうようなことも起こり得るので注意が必要である．複素数の範囲まで考えればこのような問題は解消するのだが，この節では，あまり深入りしない．しかし，例えば方程式 $x^2+y^2+1=0$ が表している図形は単なる空集合ではなく，複素数の "影" のようなものを伴っていると考えると良いかもしれない．

演習 4.13　点 $(x,y)=(i,0)\in\mathbb{C}^2$ は $x^2+y^2+1=0$ を満たすことを示せ．もっと一般に任意の $x\in\mathbb{C}$ に対して $x^2+y^2+1=0$ を満たす y が存在することを示せ．これを $x^2+y^2-1=0$ を実数座標で考えたときと比較してみよ．

平面 (実) 2 次曲線全体の集合

$$\mathscr{Q}=\Big\{F(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0\Big\}$$

はその係数の全体と同一視できるから，6 次元のベクトル空間をなす[5)]．さて，2 次曲線を合同変換で写すと方程式はどう変わるだろうか？ これは合同変換による座標変換の問題と言うこともできる．

この問題を考えるには，アフィン変換の次のような表示が便利である．まず実平面 $\mathbb{R}^2$ を 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ に埋め込んで考える (!)．

$$\mathbb{R}^2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}\,\middle|\,x,y\in\mathbb{R}\right\}.$$

これは要するに，xyz 座標空間において z 座標が 1 である平面を考えることであり，xy 平面を z 軸の正の方向へ 1 だけ "持ち上げた" ものである．これに合わせて，合同変換群の表示もいじっておく必要がある．そこで，合同変換群を次のように実現しよう．

$$E_2=\left\{g=\begin{pmatrix}h&v\\0&1\end{pmatrix}\,\middle|\,h\in\mathrm{O}_2(\mathbb{R}),\ v\in\mathbb{R}^2\right\}=\begin{pmatrix}\mathrm{O}_2(\mathbb{R})&\mathbb{R}^2\\0&1\end{pmatrix}.$$

表示だけを見ると $\begin{pmatrix}h&v\\0&1\end{pmatrix}$ は 2 次の正方行列のように見えるが，実際にはそう

---

5) 既に注意したように，時として図形として空集合になったりするが，ここでは気にしない．また，後で述べるように，方程式自身を定数倍しても曲線は変わらないので，実際には射影空間を考える必要がある．

ではなく，h は 2 次の直交行列で，左下の 0 は (0,0) を，右上の v は 2 次の列ベクトルを表すことに注意しよう．したがって，g は 3 次の正方行列になっている．以下，本書ではしばしばこのような表記法を用いる．このように表しておくと，$g \in E_2$ の平面 $\mathbb{R}^2$ への作用は単なる 3×3 行列の積となる．実際，次の式を見てほしい．

$$\begin{pmatrix} h & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \cdot p + v \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ただし } p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

この表示を用いると，2 次曲線の式も次のように行列を用いて表すことができる．

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \text{ と置くと} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} {}^t v A v &= (x,y,1)\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = F(x,y). \end{aligned}$$

これで，いくつかの係数は 2 倍してある理由がお分かりになったであろう．このようにして，2 次曲線 (の係数) は 3 次の対称行列 A と思うことができる．**対称行列**は対角線に関して対称な成分を持つ行列のことで，転置行列の記号を用いると ${}^t A = A$ を満たすような行列と言ってもよい．このような，実数を成分に持つ 3 次の対称行列の全体を $\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$ で表すことにする．そのとき，$g \in E_2$ は

$$F(g^{-1} \cdot v) = {}^t(g^{-1}v)A(g^{-1}v) = {}^t v({}^t g^{-1} A g^{-1})v$$

のように働くので，結局

$$E_2 \curvearrowright \mathscr{Q} = \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R}), \quad A \mapsto {}^t g^{-1} A g^{-1} \tag{4.6}$$

が E_2 の作用である．さて，この作用における不変式を考えるときには，さらに，対称行列の空間 $\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$ 上の多項式環 $\mathbb{C}[\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})]$ における E_2 の作用を考えることになる．空間 $\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$ 上の多項式とは，平たく言えば $A \in \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$ の成分の多項式である．

定理 4.14　上で定義された作用 $E_2 \curvearrowright \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$ の不変式環 $\mathbb{C}[\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})]^{E_2}$ は，$A \in \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$ を (4.5) のように成分表示しておくと

$$a + c, \quad ac - b^2, \quad \Delta = \det A$$

で生成される．これら 3 つの不変式は代数的に独立である．

証明　行列 $A \in \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$ および $g \in E_2$ を

$$A = \begin{pmatrix} X & u \\ {}^t u & f \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}; \quad g = \begin{pmatrix} h & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

と表そう．既に注意したように，h は 2 次の直交行列で v は 2 次の列ベクトルである．このように書いておくと，g の A への作用は

$${}^t gAg = \begin{pmatrix} {}^t hXh & {}^t hXv + {}^t hu \\ {}^t vXh + {}^t uh & f + {}^t vXv + 2u \cdot v \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

と計算できる[6]．さて $a + c = \operatorname{trace} X$, $ac - b^2 = \det X$ であるから，つまるところ定理の主張は，不変式環 $\mathfrak{I} = \mathbb{C}[\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})]^{E_2}$ に属する多項式が $\operatorname{trace} X$, $\det X$, $\det A$ の多項式に他ならないということである．

そこで，まずこの 3 つの量が不変量であることを見ておこう．行列 h は直交行列なので，${}^t h = h^{-1}$ が成り立つ．したがって

$${}^t hXh = h^{-1}Xh \quad \therefore \quad \operatorname{trace}(h^{-1}Xh) = \operatorname{trace} X,$$
$$\det(h^{-1}Xh) = \det X$$

である．つまり ${}^t gAg$ の左上隅の 2 次行列のトレースと行列式は A のそれと同じである．これは $\operatorname{trace} X$ と $\det X$ が不変式であることを意味する．次に (4.7) 式の g に対して，$\det g = \det h = \pm 1$ である．したがって $\det({}^t gAg) = (\det g)^2 \det A = \det A$ が成り立ち，$\det A$ も不変式であることが分かる．

以上から，$\operatorname{trace} X$, $\det X$, $\det A$ の多項式は不変式であることが示された．そこで，逆に不変式ならば $\operatorname{trace} X$, $\det X$, $\det A$ の多項式であることを示そう．

式 (4.8) を見ると X が正則のとき $v = -X^{-1}u$ ととれば

$$(4.8) = \begin{pmatrix} {}^t hXh & 0 \\ 0 & f - {}^t uX^{-1}u \end{pmatrix}$$

となる．不変式環 $\mathfrak{I} = \mathbb{C}[\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})]^{E_2}$ に属する多項式 $P(A)$ を取ると，$P(A) = P({}^t gAg)$ $(g \in E_2)$ が成り立つので，上の計算より

---

[6] 不変式を考える際には $g \in G$ で考えても $g^{-1} \in G$ で考えても同じなので，作用 (4.6) において g^{-1} の代わりに以下 g を考えることにする．

$$P(A) = P\left(\begin{pmatrix} {}^t hXh & 0 \\ 0 & f - {}^t uX^{-1}u \end{pmatrix}\right)$$

である．$h \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ は任意の直交行列だが，これをうまく取ることによって実対称行列 X は対角化できることが知られている (例えば [31], [40] 参照)．その対角成分は X の固有値であるが，それを α, β と書き，$\gamma = f - {}^t uX^{-1}u$ と置くことによって

$$P(A) = P\left(\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}\right) \quad ただし\ A = \begin{pmatrix} X & u \\ {}^t u & f \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

である．つまり $P(A)$ は α, β, γ の多項式であるが，$h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ と取ると，

$${}^t h \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

であるから，不変式 $P(A)$ は α, β に関しては対称式でなければならない．したがって，それは基本対称式 $\operatorname{trace} X = \alpha + \beta$, $\det X = \alpha\beta$ の多項式である．一方，$\det A = \alpha\beta\gamma$ より

$$\gamma = f - {}^t uX^{-1}u = (\det X)^{-1} \cdot \det A$$

だから，$P(A)$ は 3 つの不変式 $\operatorname{trace} X$, $\det X$, $\det A$ の有理式として書き表すことができる (有理式の分母に現れるのは $\det X$ のみである)．しかし，これら 3 式はすべて既約で互いに素であるから，有理式は実は多項式でなければならない[7]．これらが代数的に独立であることは，

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

の形の行列に制限して考えて独立であることから分かる．　▮

行列式 $\det A$ を Δ で表し，2 次曲線

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

の**判別式**と呼ぶ．

演習 4.15　$\Delta = 0$ であれば，2 次曲線は空集合か，あるいは唯一つの点，ま

---

7) この事実は厳密には多項式環が一意分解整域 (UFD) であることから従う ([47], [48], [51] 参照)．読者は整数の素因数分解との類似を考えてみられたい．

たは 2 本以下の直線になることを示せ (ただし $\Delta \neq 0$ でも 2 次曲線の方程式を満たす図形が (実数の範囲では) 空集合であることもある．しかし複素数の範囲では直線に退化しない 2 次曲線を表している)．

そこで以下 $\Delta \neq 0$ を仮定することにしよう．

2 次曲線は，その方程式の両辺を定数倍しても変わらないことから，曲線自身が持っている本質的な不変量としては，係数たちの不変量そのものではなく，次の 2 つの量 P_1, P_2 を取るのがよいだろう．

$$P_1 = \frac{\operatorname{trace} X}{\sqrt[3]{\Delta}}, \quad P_2 = \frac{\det X}{\sqrt[3]{\Delta^2}}. \tag{4.10}$$

実際，この 2 つの不変量は方程式の係数を定数倍しても変化しないことが容易に分かる[8)]．このような量を**射影的不変量**と呼ぶ．

不変量 P_1, P_2 は 2 次曲線の方程式の係数を用いて表されているが，合同な 2 次曲線ではすべて同一の値になり，座標系の選び方によらない図形の本質的な性質を現していると考えられる．逆に不変量 P_1, P_2 が一致するような 2 次曲線は合同である．

定理 4.14 の証明中の式 (4.9) を見ると，$A \in \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$ を $A = \begin{pmatrix} X & u \\ {}^t u & f \end{pmatrix}$ と表示したとき，X が正則行列ならば，運動群 E_2 の作用によって対角行列 $\mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ に変形できることが分かる．このことは，係数行列 A を持つ 2 次曲線の定義方程式が運動群によって

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma = 0 \quad (\alpha\beta\gamma \neq 0) \tag{4.11}$$

の形に変形できることを意味している．一方 X が正則でないときには，

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \alpha x^2 + 2ey = 0 \tag{4.12}$$

の形に変形できる．ただし $\Delta = -\alpha e^2 \neq 0$ と仮定しているのであった．

演習 4.16 式 (4.12) を確かめておこう．

(1) まず $A = \begin{pmatrix} X & u \\ {}^t u & f \end{pmatrix}$ は $g = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の作用によって，

8) ただし P_1 の分母においては $a > 0$ に対して $\sqrt[3]{-a^3} = -a$ と解釈することにする．

$$
{}^t gAg = \begin{pmatrix} {}^t hXh & {}^t hu \\ {}^t uh & f \end{pmatrix}
$$

となるが，$\det X = 0$ であるような実対称行列 X は直交行列 h によって対角化すると，${}^t hXh = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となることを示せ．したがって最初から X は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の形としてよい．ここで $X \neq 0$ だから $\alpha \neq 0$ である ($X = 0$ なら $\Delta = 0$ となることに注意せよ)．

(2) 次に $Xv + u = {}^t(0, e)$ となるように $v \in \mathbb{R}^2$ を選ぶことができることを示せ．そこで $h = 1_2$ (単位行列) として，$g = \begin{pmatrix} 1_2 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と置くと

$$
{}^t gAg = \begin{pmatrix} X & Xv + u \\ {}^t(Xv + u) & f + {}^t vXv + 2u \cdot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \\ 0 & e & f' \end{pmatrix}
$$

である．ただし $f' = f + {}^t vXv + 2u \cdot v$ と置いた．仮定より $\det A \neq 0$ だから $e \neq 0$ である．

(3) A を前問で最後に得られた形の行列とする．ここでさらに $v = {}^t(0, s)$ と置いて，$g = \begin{pmatrix} 1_2 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の作用を考えると，$Xv = 0$ だから

$$
{}^t g \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \\ 0 & e & f' \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \\ 0 & e & f'' \end{pmatrix}, \quad f'' = f' + 2se
$$

となる．そこで $s = -f'/2e$ ととれば，最終的に式 (4.12) の形の行列を得る．

さて，$\det X \neq 0$ のとき，式 (4.11) の形の方程式を 2 次曲線の標準形と呼ぼう．このとき

$$
P_1 = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}, \quad P_2 = \frac{\alpha\beta}{\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}} = \frac{\sqrt[3]{\alpha\beta}}{\sqrt[3]{\gamma^2}} \neq 0 \tag{4.13}
$$

である．一方 $\det X = 0$ のときには，式 (4.12) のように 2 次曲線を表しておくと，

$$
P_1 = \frac{\alpha}{\sqrt[3]{(-\alpha e^2)}} = -\frac{\sqrt[3]{\alpha^2}}{\sqrt[3]{e^2}}, \quad P_2 = 0 \tag{4.14}
$$

である．この形を見れば，不変式による 2 次曲線の特徴付けが次のようにできることは明らかだろう．

$$\text{双曲線} \iff P_2 < 0, \qquad \text{放物線} \iff P_2 = 0,$$
$$\text{(楕) 円} \iff P_2 > 0, \qquad \text{円} \iff (P_1)^2 - 4P_2 = 0,\ P_2 > 0. \tag{4.15}$$

例 4.17 楕円の不変量を考えてみる．例えば面積は合同変換で変化しないから，楕円の面積は 2 つの不変量 P_1, P_2 を用いて表せるはずである．そこで，楕円の標準形

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geq b > 0) \tag{4.16}$$

を考える．この楕円は x 軸と $\pm a$ で交わり，y 軸とは $\pm b$ で交わっている．半径が a の円を考えると，我々の楕円はこの円を y 軸方向に b/a 倍したものである．したがって楕円の面積は

$$\frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi ab$$

となる．一方，式 (4.16) 楕円の場合には (4.13) によって

$$P_1 = -\frac{a^2 + b^2}{\sqrt[3]{a^4 b^4}}, \quad P_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2 b^2}} \tag{4.17}$$

が基本不変式である．したがって面積は $\pi P_2^{-3/2}$ で与えられる．計算は楕円の標準形を用いて行ったが，不変量 P_1, P_2 も面積も合同変換によって変わらないから，合同変換によって写りあうすべての楕円に対して面積は $\pi P_2^{-3/2}$ と表されることになる．

次に，楕円の 2 つの焦点間の距離を考えてみたい．もちろんこれも合同変換によって不変であるから，原理的に P_1, P_2 で表されるはずである．

まず焦点について復習しておこう．楕円は幾何学的には面白い性質を持っており，平面上の 2 点 F_1, F_2 に対して，この 2 点からの距離の和が一定値 $S > 0$ になるような点の軌跡がちょうど楕円になる．この 2 点 F_1, F_2 を楕円の**焦点**と呼ぶ (図 4.4)．特別な場合として $F_1 = F_2$ の場合は円となる．

焦点という言葉の由来はもちろん光学的性質による．既に述べたように楕円上の点 Q は $\overline{F_1 Q} + \overline{QF_2} = S$ を満たしている．楕円上の点 Q における接線を ℓ_Q とする．このとき，直線 $F_1 Q$ と QF_2 は接線 ℓ_Q を軸としてちょうど鏡映の位置関係にある．つまり楕円の内部を鏡張りして[9]，1 つの焦点に光源を置け

[9] 楕円は 2 次元であるが，xy 平面に垂直な方向に少し 3 次元的に拡張して考えればよいだろう．

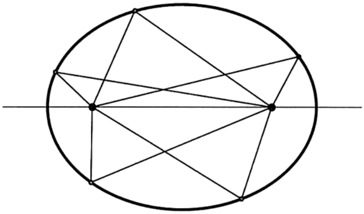


図 **4.4**　楕円の焦点と軌跡

ば，その光はもう一方の焦点に集光することになる．これが“焦点”という言葉の由来である (図 4.5).

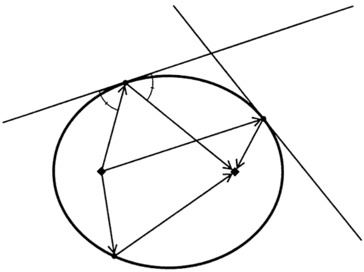


図 **4.5**　光源と集光点

さて，楕円の標準形 (4.16) に対して，その焦点 F_1, F_2 は長軸上にあり，座標を $(\pm c, 0)$ $(c>0)$ と書いておくと，$a^2=b^2+c^2$ が成り立つ．実際，楕円と x 軸との交点 $(\pm a, 0)$ と 2 焦点との距離の和は $2a$ であり，楕円と y 軸との交点 $(0, \pm b)$ と 2 焦点との距離の和は $2\sqrt{b^2+c^2}$ である．焦点の性質から，この 2 つの量は等しいので，$2a=2\sqrt{b^2+c^2}$ を得る．つまり $a^2=b^2+c^2$ である．そこで $F_1=(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$, $F_2=(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ と置くと，二焦点間の距離は $2c=2\sqrt{a^2-b^2}$ になる．ところで，式 (4.17) より

$$a^2+b^2=-P_1/P_2^2, \quad a^2b^2=P_2^{-3}$$

だから，

$$(a^2-b^2)^2=(a^2+b^2)^2-4a^2b^2=\frac{P_1^2}{P_2^4}-4\frac{1}{P_2^3}=\frac{1}{P_2^4}(P_1^2-4P_2)$$

と計算できる．したがって二焦点間の距離は

$$\overline{F_1F_2}=2\sqrt{a^2-b^2}=2\,\frac{(P_1^2-4P_2)^{\frac{1}{4}}}{P_2}$$

で与えられる．

楕円の合同変換による不変量としては，この他にも周長などが考えられる．楕円の周長は円とは異なり，短径や長径の有理式では表せないが，楕円関数を用いて表すことができる[10]．一方，上の計算から

$$a\pm b=\frac{\sqrt{-P_1\pm 2\sqrt{P_2}}}{P_2}$$

が分かるから，

$$a=\frac{1}{2P_2}\left(\sqrt{-P_1+2\sqrt{P_2}}+\sqrt{-P_1+2\sqrt{P_2}}\right),$$

$$b=\frac{1}{2P_2}\left(\sqrt{-P_1+2\sqrt{P_2}}-\sqrt{-P_1+2\sqrt{P_2}}\right)$$

となり，楕円の性質のうち a, b で書き表されるものはすべて P_1, P_2 を用いて表すことができる．もちろん周長も P_1, P_2 と楕円関数を用いて表すことができるのである．

演習 4.18　双曲線は 2 点からの距離の差が一定であるような点のなす曲線である．この 2 点を双曲線の**焦点**という．

(1) 双曲線は言葉通り 2 つの曲線成分からなるが，そのうちの 1 つの成分の表面が鏡張りされている場合を考える．双曲線の 1 つの焦点を光源として，そこから出た光はどのような軌跡をたどるだろうか?

(2) 双曲線の 2 つの焦点間の距離を不変量 P_1, P_2 を用いて表せ．

例 4.19　放物線について考えてみよう．放物線には焦点は 1 つしかない[11]．

平面上の 1 つの点 F とその点を通らない直線 ℓ を考える．このとき，平面上の点 P であって，F までの距離と，直線 ℓ までの距離が等しいような点 P の

---

10) というよりは，楕円関数はこのようにして生まれたという方が自然であろう．楕円関数の初等的な解説は [35], [39], [5] などを参照されたい．また §8.4 参照．

11) あるいはもう 1 つの焦点は無限遠方にある，というべきかもしれない．

なす軌跡がちょうど放物線となる．F を**焦点**，直線 ℓ を放物線の**準線**と呼ぶ．

これを式によって確かめてみよう．まず焦点を y 軸上にとり，その座標を $F=(0,c)$ $(c>0)$ とする．適当に座標を F の周りに回転することで直線 ℓ の方程式は $y=-d$ としてよいだろう．$P=(x,y)$ と置くと，P と F との距離は $\sqrt{x^2+(y-c)^2}$ となり，直線 ℓ との距離は $|y+d|$ であるから，これらが等しいとすると

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2}=|y+d|,$$

両辺を二乗して

$$x^2+(y-c)^2=(y+d)^2, \quad \therefore \quad x^2+c^2-d^2=2(c+d)y.$$

$c+d\neq 0$ のとき[12]，この式をまとめなおして

$$y=\frac{1}{2(c+d)}x^2+\frac{c-d}{2}$$

を得る．$c=d$ のとき，ちょうどこの放物線は原点を頂点に持ち，放物線の方程式は標準形の形をしている．そこで，以下，$c=d$ の場合を考えよう．このとき，方程式は

$$y=\frac{1}{4c}x^2 \tag{4.18}$$

で，焦点は $(0,c)$, 準線は $y=-c$ である．既に計算したように，標準形 $\alpha x^2+2ey=0$ の場合 $P_1=-\sqrt[3]{\alpha^2/e^2}$ だから，式 (4.18) の放物線の場合には

$$P_1=-\sqrt[3]{\frac{1}{4c^2}}$$

なので，放物線の焦点と準線の距離 (焦点から準線に降ろした垂線の長さ) は，$-P_1^{-3/2}$ で与えられる．

演習 4.20　放物線の焦点に置いた点光源から発した光は，放物線で反射して放物線の対称軸と平行な光線となることを示せ．これがパラボラ・アンテナの原理である[13]．

演習 4.21　2 次曲線を離心率を用いて極表示し，離心率を不変量 P_1, P_2 を用いて表せ．

---

[12] $c+d=0$ のときは $x^2=0$ となって，放物線は二重直線に退化する．このとき焦点は準線上にある．

[13] パラボーラ parabola は放物線を意味する．

第5章　平面上のアフィン変換とアフィン幾何

等長変換をユークリッド合同変換とも呼ぶのは，等長変換によって不変な図形の性質を研究するのがユークリッド幾何学に他ならないからである．長さの概念を変えることにより，ユークリッド幾何学とは異なる種類の幾何学を研究することができる．それは例えば双曲幾何学やリーマン幾何学と呼ばれる幾何学であり，一般相対性理論がリーマン幾何学を土台にして構築されたことは有名である．

しかし，この章では我々は『長さ』にとらわれないで，もう少し他の不変量を考えてみたいと思う．この章で考える不変量は，直線の平行性とか，図形の面積比などに関係しており，このような不変量を扱う幾何学はアフィン幾何と呼ばれている．アフィン幾何学という名称を耳にしたことがない読者も多いと思うが，まず本書の目標である幾何に附随する群の話から始めよう．

5.1　アフィン変換群とその作用

合同変換群によって不変な量の研究がユークリッド幾何に他ならないことを看破したのがクラインであった．では合同変換群を他の群に変えると，幾何学はどのように変質するだろうか? ここでは最初の簡単な例としてアフィン変換群 A_2 を考えることにしよう．

$$A_2 = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^2 \right\} = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) & \mathbb{R}^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

表示だけを見ると，合同変換の表示と全く同じように見えるが，行列 g の左上隅の 2×2 行列 α が直交行列と限らず，任意の正則行列を表すところが合同変換と異なっている点である．このアフィン変換群 A_2 は平面 $\mathbb{R}^2$ に式の上では合同変換の場合と全く同じように作用する．これをちょっと復習しておこう．まず

実平面 $\mathbb{R}^2$ を 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ に埋め込んで考えるのであった．

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

このように表しておくと，$g \in A_2$ の平面 $\mathbb{R}^2$ への作用は単なる 3×3 行列の掛け算である．

$$\begin{pmatrix} \alpha & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot p + v \\ 1 \end{pmatrix}, \quad ただし\ p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

したがって $p \in \mathbb{R}^2$ は g の作用によって $g \cdot p = \alpha \cdot p + v$ に写る．これは要するに，線型変換 $p \mapsto \alpha \cdot p$ と平行移動 $p \mapsto p + v$ の合成に他ならない．

演習 5.1　アフィン変換を行列 $g \in A_2$ による積として実現すると，平面上の一直線上にない 3 点の像でアフィン変換が決まることを見るのは難しくない．

(1) 3 点 $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ $(i = 1, 2, 3)$ が一直線上になければ，3 つのベクトル $\{ {}^t(x_i, y_i, 1) \mid i = 1, 2, 3 \}$ は一次独立であることを示せ．

(2) アフィン変換を表す 3 次の正則行列 g は $\{ {}^t(x_i, y_i, 1) \mid i = 1, 2, 3 \}$ の像で決まることを示せ．

(3) 同様にして，3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ のアフィン変換は同一平面上にない 4 点の像で決まることを示せ．

さて，このアフィン変換群による幾何的不変量はどのようなものだろうか? また，そのような幾何的不変量に着目して展開される幾何学とはどのようなものだろうか? この 2 つの問題を考えてみよう．

まず最初の問題，幾何的不変量に関してであるが，ユークリッドの合同変換群と同様に考えれば，当然不変式環 $\mathbb{C}[(\mathbb{R}^2)^m]^{A_2}$ を考えるのが自然であろう．ここで $\mathbb{C}[(\mathbb{R}^2)^m]$ は平面 $\mathbb{R}^2$ の m 個の直積上の多項式関数であった．これは平面上の m 個の点配置に対応して決まる多項式関数全体である．さらに $\mathbb{C}[(\mathbb{R}^2)^m]^{A_2}$ によってアフィン変換群 A_2 による不変式を表すのであった．このような不変式によって表される量がアフィン変換群に附随する幾何学にとって基本的になるはずであると考えられる．ところが，驚くべきことに，この幾何学の特徴を捉えるはずの不変式環は自明になってしまう!

定理 5.2　上で定義された作用 $A_2 \curvearrowright (\mathbb{R}^2)^m$ の不変式環 $\mathbb{C}[(\mathbb{R}^2)^m]^{A_2}$ は，定数関数のみからなり，$\mathbb{C}$ に同型である．

証明　この定理は，むしろ否定的な側面を持ち，以下の議論ではある種の警告として使用されるにすぎない．そこで，ここでは証明のスケッチのみを与え，詳細をうめることは読者の方々にお任せする．

まず A_2 の中の平行移動を考えることにより，m 点のうち最初のものは原点としてよい．したがって，$\mathbb{C}[(\mathbb{R}^2)^m]^{A_2} \simeq \mathbb{C}[(\mathbb{R}^2)^{m-1}]^{\mathrm{GL}_2}$ である．そこで最初から $\mathbb{C}[(\mathbb{R}^2)^m]^{\mathrm{GL}_2} \simeq \mathbb{C}$ を示せば十分である．

スカラー行列 $a_t = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2$ を考えると，不変式 $f(p) \in \mathbb{C}[(\mathbb{R}^2)^m]^{\mathrm{GL}_2}$ $(p = (p_1, \ldots, p_m))$ に対して $f(a_t \cdot p) = f(p)$ が成り立たねばならない．ところが $t \to 0$ として極限を取ると $a_t \cdot p \to 0$ なので，

$$f(p) = \lim_{t \to 0} f(a_t \cdot p) = f(0)$$

である．これは f がいたるところ定数 $f(0)$ と一致することを示しており，定数関数になる．　■

この定理は，一見すると，群の作用によって不変な量は存在せず，アフィン変換群によって不変な幾何学的性質もないと言っているように見える．しかし，実際にはそうではない．

例えば，アフィン変換群によって「平行な直線」という幾何学的性質は保たれる．したがって，平行四辺形は平行四辺形に写る．また，2 次曲線も 2 次曲線に写るが，例えば，円は一般に楕円に写るので,「円」という幾何学的対象はアフィン変換群によっては保たれない．

では，不変式が不在であるにもかかわらず，このようなアフィン変換群によって保存される幾何学的構造が存在することはどのように説明できるだろうか? そのために，上にあげたアフィン変換群の性質のうち，直線や平行性に関する性質を証明してみよう．証明することで見えてくるものがあるはずである．

まず，直線の平行性について考えよう．アフィン変換では 2 本の平行な直線は，やはり平行な直線に写る．これを直接証明するのは簡単だが，不変式と関連付けて考えたいので，直線ではなく，平行四辺形を考えることにする．平行四辺形の 4 頂点を反時計回りに a, b, c, d とし，各頂点は例えば，$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ などと座標を用いて表しておく．このとき，次の補題が成り立つ．

補題 5.3　平面 $\mathbb{R}^2$ 上の 4 点 a, b, c, d が，この順で平行四辺形をなすことと

$$\det(a-b, c-d) = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & c_1 - d_1 \\ a_2 - b_2 & c_2 - d_2 \end{vmatrix} = 0$$

および

$$\det(a-d, b-c) = \begin{vmatrix} a_1 - d_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - d_2 & b_2 - c_2 \end{vmatrix} = 0$$

が成り立つことは同値である．

証明　四辺形の 2 組の対辺が平行であることと，平行四辺形であることが同値なので，この補題は，2 つのベクトル $u, v \in \mathbb{R}^2$ に対して u, v が平行であることと $\det(u, v) = 0$ が同値であることから従う．∎

さて，点 a, b をアフィン変換 $g = \begin{pmatrix} \alpha & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で写したものを a', b' と書くと，

$$a' - b' = g \cdot a - g \cdot b = (\alpha a + v) - (\alpha b + v) = \alpha(a - b)$$

である．ここで $\alpha \in \mathrm{GL}_2$ は 2 次の正則行列，$v \in \mathbb{R}^2$ は平面ベクトルであったことに注意しておく．同様に c, d を写して計算すると

$$\begin{aligned} \det(a' - b', c' - d') &= \det(\alpha(a-b), \alpha(c-d)) \\ &= \det \alpha \cdot \det(a-b, c-d) \end{aligned}$$

である．ここで $\det \alpha \neq 0$ だから，この式から，

$$\det(a' - b', c' - d') = 0 \Longleftrightarrow \det(a-b, c-d) = 0.$$

同様にして

$$\det(a' - d', b' - c') = 0 \Longleftrightarrow \det(a-d, b-c) = 0$$

も分かるから，結局次の定理が示された．

定理 5.4　アフィン変換によって 2 本の平行な直線はやはり平行な直線に写る．また，アフィン変換によって平行四辺形は平行四辺形に写る．

上の証明におけるキーポイントは，アフィン変換によって $\det(a-b, c-d)$ は変化するが，その変化はゼロでない定数倍である，という点である．このような多項式を**相対不変式**と呼ぶ．$\det(a-b, c-d)$ は 4 つのベクトル a, b, c, d によって決まる 2 次式であるから，これは $\mathbb{C}[(\mathbb{R}^2)^4]$ におけるアフィン変換群 A_2

の相対不変式である.

この相対不変式と不変式の関係について次節でより詳しく調べてみよう.

5.2 相対不変式

まず,一般的に群 G の作用に関する相対不変式を定義しておこう.

定義 5.5 群 G が空間 X に作用しているとき,X 上の恒等的にはゼロでない関数 $f(x)$ が**相対不変式**であるとは,任意の $g \in G$ に対して

$$f(g \cdot x) = \chi_f(g)\, f(x) \quad (x \in X)$$

となるような定数 $\chi_f(g) \in \mathbb{C}$ が存在するときに言う.このとき $\chi_f : G \to \mathbb{C}$ を f に付随する G の**指標**と呼ぶ.

指標 $\chi_f : G \to \mathbb{C}$ は

$$\chi_f(gh) = \chi_f(g)\chi_f(h) \quad (g, h \in G) \tag{5.2}$$

を満たしている.実際,

$$\begin{aligned} \chi_f(gh)f(x) &= f((gh) \cdot x) = f(g \cdot (h \cdot x)) \\ &= \chi_f(g)f(h \cdot x) = \chi_f(g)\chi_f(h)f(x) \end{aligned}$$

であり,$f(x) \neq 0$ となるような $x \in X$ が存在するので,(5.2) 式が成り立つ.この (5.2) 式は §3.1 の群の表現の定義式である (3.1) 式とほとんど同じ形をしていることに気づかれた読者も多いであろう.実際 $V = \mathbb{C}$ を 1 次元ベクトル空間とみなせば,指標 χ_f は準同型

$$\chi_f : G \to \mathbb{C}^\times \simeq \mathrm{GL}(V)$$

を決めることになるから,これは G の 1 次元表現に他ならない.以下 f が文脈から明らかなときには,χ_f を単に χ と書く.

さて,アフィン変換群 A_2 の場合に話を戻すと,$\det(a-b, c-d)$ は A_2 の相対不変式であるが,$g = \begin{pmatrix} \alpha & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A_2$ に対して

$$\det(g \cdot a - g \cdot b, g \cdot c - g \cdot d) = \det\alpha \det(a-b, c-d)$$

なので，これに付随する指標は $\chi(g)=\det\alpha$ である．上で証明した指標の性質を確かめてみよう．そこで $h=\begin{pmatrix}\beta & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in A_2$ と書いておくと，

$$gh=\begin{pmatrix}\alpha & v\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\beta & \alpha u+v\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

だから，

$$\chi(gh)=\det(\alpha\beta)=\det\alpha\cdot\det\beta=\chi(g)\chi(h)$$

である．したがってこの場合には，指標の性質 (5.2) は，行列式のよく知られた性質 $\det(\alpha\beta)=\det\alpha\cdot\det\beta$ に他ならない．

演習 5.6　$a,b,c\in\mathbb{R}^2$ に対して，$f(a,b,c)=\det(a-c,b-c)$ とおくと，これはアフィン変換群 A_2 の相対不変式であることを示せ．このとき指標 χ_f は上で定義された指標 $\chi(g)=\det\alpha$ と等しいことも確かめよ．

相対不変式は不変式と違い，その全体を考えても環構造を持たない．実際，上の 2 つの相対不変式を考えれば，

$$\text{和}\ \ \det(a-b,c-d)+\det(a-c,b-c)\qquad \text{も}$$

$$\text{積}\ \ \det(a-b,c-d)\det(a-c,b-c)\qquad \text{も}$$

相対不変式であるが，和に付随する指標は χ だが，積に付随する指標は χ^2 である．したがって両者は異なる指標に付随する相対不変式となる．このように異なる指標に属する相対不変式の和，例えば

$$\det(a-b,c-d)^2+\det(a-c,b-c)$$

などは，もはや相対不変式ではない．

まとめると，次のようになる．

命題 5.7　群 G の空間 X への作用を考え，この作用に関する相対不変式 $\varphi(x),\psi(x)$ を考える．相対不変式に付随する指標をそれぞれ χ_φ,χ_ψ と書く．

(1) 積 $\varphi(x)\psi(x)$ は相対不変式であり，その指標は $\chi_{\varphi\psi}=\chi_\varphi\chi_\psi$ と指標の積で与えられる．

(2) 和 $\varphi(x)+\psi(x)$ は $\chi_\varphi=\chi_\psi$ の場合，その場合に限り相対不変式である．このとき付随する指標は χ_φ であって，変化しない．

さて，アフィン変換群 A_2 の実平面 $\mathbb{R}^2$ への作用を考え，多項式環 $\mathbb{C}[(\mathbb{R}^2)^m]$ における相対不変式がどのようになるかを述べておこう．A_2 の指標 χ を，上で定義したように $g = \begin{pmatrix} \alpha & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A_2$ に対して，$\chi(g) = \det \alpha$ と決めておく．

定理 5.8　アフィン変換群 A_2 の実平面 $\mathbb{R}^2$ への作用を考える．

(1) $\mathbb{C}[(\mathbb{R}^2)^m]$ におけるアフィン変換群 A_2 の相対不変式に付随する指標は χ^k $(k \geq 0)$ の形をしている．

(2) $(\mathbb{R}^2)^m$ の座標を $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ $(p_i \in \mathbb{R}^2)$ と表すとき，指標 χ^k を持つ相対不変式は $\det(p_i - p_j, p_{i'} - p_{j'})$ の形の 2 次式の k 個の積とそれらの一次結合で尽くされる．

上の定理の (1) においても (2) においても，χ^k の形の指標とそれに対応する相対不変式が定理のようにして得られることは，これまで述べたことから容易に分かる．問題は「それらで相対不変式が尽きる」という部分の証明であるが，これについては表現論のある程度の知識と一般論が必要なので，ここでは述べない．

この定理より，相対不変式は基本的な相対不変式 $\det(p_i - p_j, p_{i'} - p_{j'})$ の斉次積とその一次結合を取ることによってすべて得られることが分かる．相対不変式を $f(p_1, \ldots, p_m)$ とするとき，$f(p_1, \ldots, p_m) = 0$ となるような図形の性質はアフィン変換群によって保たれる．そして，それらは十分たくさん存在しているのである．

さて，相対不変式 $\varphi(x), \psi(x)$ が与えられると，その商 $\Xi(x) = \varphi(x)/\psi(x)$ はやはり“相対不変式”である．実際，φ, ψ に付随する指標をそれぞれ χ_φ, χ_ψ と書くと，

$$\Xi(g \cdot x) = \frac{\varphi(g \cdot x)}{\psi(g \cdot x)} = \frac{\chi_\varphi(g)\varphi(x)}{\chi_\psi(g)\psi(x)} = \frac{\chi_\varphi(g)}{\chi_\psi(g)} \cdot \Xi(x)$$

だから $\Xi(x)$ は指標 χ_φ/χ_ψ を持つ相対不変式である $\cdots$ ように思える．しかし，ここで問題なのは，実際には $\Xi(x)$ は $\varphi(x), \psi(x)$ の有理式であり，特に分母 $\psi(x)$ がゼロになるような点では定義されていないという点である．そこでこのような式を**相対不変有理式**と呼ぼう．

さて，特別な場合として，2 つの相対不変式 $\varphi(x), \psi(x)$ の指標が一致している場合，つまり $\chi_\varphi = \chi_\psi$ となっている場合を考えよう．この共通の指標を χ と

書くと，その商 $\Xi(x)=\varphi(x)/\psi(x)$ は

$$\Xi(g\cdot x)=\frac{\varphi(g\cdot x)}{\psi(g\cdot x)}=\frac{\chi(g)\varphi(x)}{\chi(g)\psi(x)}=\Xi(x)$$

を満たし，G の作用に関して不変な関数になる．しかし，これも分母がゼロのところでは定義されないので**不変有理式**と呼ぶ．

例 5.9　平面上の 2 点 $p,q\in\mathbb{R}^2$ を取る．このとき p,q を通る直線上の点 x は

$$\det(p-x,q-x)=0$$

を満たす．p,q,x をアフィン変換 g によって写した点を p',q',x' と書くと，これらは上の式と全く同じ方程式を満たし，アフィン変換は直線を直線にうつすという (ほぼ当たり前の) 結果が得られる．

さてこのとき，x が p,q を結ぶ線分を $s:t$ $(s+t=1)$ に内分する点であるとする[1]と，直線外の任意の 1 点 z を取ることによって

$$s=\frac{\det(p-z,x-z)}{\det(p-z,q-z)},\quad t=\frac{\det(q-z,x-z)}{\det(q-z,p-z)}$$

と表せる．右辺を見ると，これらは不変有理関数であるから，結局 s,t は g で写しても同じ値を取ることが分かる．つまり，(同一直線上の) 線分比はアフィン変換群によって保たれている．

例 5.10　$p,q,r\in\mathbb{R}^2$ を 3 角形の頂点とすると，この 3 角形の符号付き面積は

$$S(p,q,r)=\frac{1}{2}\det(p-r,q-r)$$

で与えられる．したがって任意の 2 つの 3 角形の符号付き面積の比

$$\frac{S(p_1,q_1,r_1)}{S(p_2,q_2,r_2)}=\frac{\det(p_1-r_1,q_1-r_1)}{\det(p_2-r_2,q_2-r_2)}$$

はアフィン変換によって不変である．

ユークリッド幾何学で有名なチェバの定理[2]やメネラウスの定理[3]は 3 角形の面積の比を用いて定式化できることがよく知られている．したがって，この 2

---

[1] s,t が負であったり，あるいは 1 より大であるときには "外分する点" と解釈する．

[2] Giovanni Ceva (1647–1734).

[3] Menelaus of Alexandria (70 頃–130 頃).

つの定理はアフィン幾何学の定理でもある．

5.3 アフィン合同

次に，アフィン変換群によって，多角形がどのように変化するかを考えてみる．その手始めに 3 角形を考えよう．

頂点が $p, q, r \in \mathbb{R}^2$ である 3 角形と，頂点が $p', q', r' \in \mathbb{R}^2$ である 3 角形が**アフィン合同**であるとは，あるアフィン変換 $g \in A_2$ が存在して，(頂点の順番を適当に入れ替えることによって)

$$p' = g \cdot p, \quad q' = g \cdot q, \quad r' = g \cdot r$$

が成り立つときに言う．つまりアフィン変換によって一方の 3 角形が他方の 3 角形にピッタリ重なるとき，アフィン合同というわけである．

定理 5.11 アフィン変換群によって任意の 3 角形はアフィン合同である．

証明 2 つの 3 角形の頂点をそれぞれ $p, q, r \in \mathbb{R}^2$ および $p', q', r' \in \mathbb{R}^2$ とする．このとき，一方の 3 角形 p, q, r が

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で与えられているときに示せば十分である．まず，平行移動によって r' を原点に写せるから，最初から，$r' = r$ を原点として一般性を失わない．このとき，

$$p' = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad q' = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \quad \text{とし，} \quad g = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置く．すると，簡単な計算により，$p' = g \cdot p$, $q' = g \cdot q$ が確かめられる．もちろん $r' = g \cdot r$ も成り立つ． ∎

この定理によって，アフィン幾何においては 3 角形はすべて合同であることが分かった! つまり，アフィン幾何では本質的に 3 角形は 1 つしかない．したがって，例えば辺の長さが 1 の正 3 角形において成り立つアフィン幾何の定理は，すべての 3 角形に対して成り立つ．例えば，アフィン幾何においては平行とか，線分比は保たれるのであったから，中点連結定理はアフィン幾何の定理である．だから中点連結定理は正 3 角形の場合のみに証明しておけば自動的に他の任意の 3 角形に対して成り立つのである．

3 角形のアフィン合同に関して次の定理もまた重要である．

定理 5.12　3 角形の各頂点を動かさないようなアフィン変換は恒等変換に限る．

証明　3 つの頂点が，原点 0 と $a=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ であるような直角二等辺 3 角形に対して示せば十分である．

実際，すべての 3 角形はアフィン合同であったことに注意しよう．2 つの 3 角形 $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ がアフィン変換 g によって (頂点を込めて) 写りあうとし，定理が $\triangle PQR$ に対して成り立つと仮定しよう (図 5.1)．

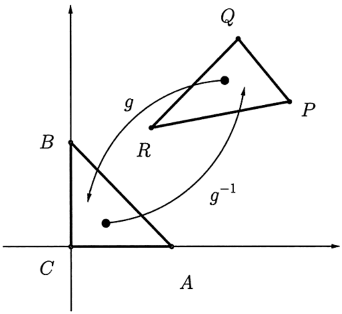


図 5.1　アフィン変換で写りあう 3 角形

アフィン変換 γ によって A, B, C が固定されていれば

$$g^{-1}\circ\gamma\circ g(P)=g^{-1}\circ\gamma(A)=g^{-1}(A)=P$$

のように P は $g^{-1}\circ\gamma\circ g$ によって固定される．Q, R についても同様であるから，結局 $g^{-1}\circ\gamma\circ g$ は 3 点 P, Q, R を固定し，$\triangle PQR$ に対して定理が成り立つという仮定より $g^{-1}\circ\gamma\circ g=\mathrm{id}$ (恒等変換) が成り立つ．したがって $\gamma=\mathrm{id}$ である．これは定理が $\triangle ABC$ に対しても成り立つことを意味する．したがって，定理はある特別な 3 角形に対して示せば十分である．

さて，最初に選んだ直角二等辺 3 角形を考え，アフィン変換 $g(x)=hx+v$ が，この各頂点を固定したとする．まず原点を固定することから $0=g(0)=v$ である．次に a を固定するので $a=g(a)=ha$ が成り立ち，同様に $hb=b$ であ

る．したがって $h(a,b)=(a,b)$ であるが，(a,b) は単位行列であるから，h も単位行列である． ∎

演習 5.13 同一直線上の線分比はアフィン変換で変わらないことを既に述べたが，同一直線上にはない線分の比はアフィン変換によって一般に不変ではないことを示せ．

次に 4 角形のアフィン合同類を考える．残念ながら (?)，4 角形の場合にはすべての 4 角形がアフィン変換で移りあうというようなことはない．実際，既に述べたように，アフィン変換で『平行』という性質は保たれるので，例えば，平行四辺形はアフィン変換で写してもやはり平行四辺形のままである．しかも実はすべての平行四辺形はアフィン合同なのである! もっと詳しく，次の定理が成り立つ．

定理 5.14 平面内の 2 つの 4 角形がアフィン合同であるための必要十分条件は，対角線の交点による 2 組の対角線の内分比[4] がそれぞれ一致することである．

証明 必要性は明らかなので十分性を示す．

前定理により，任意の 3 角形はアフィン合同であるから 4 角形の頂点のうち 3 点は，

$$a=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ (\text{原点}),\quad b=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

であるとしてよい．2 つの 4 角形の残りの頂点をそれぞれ $d,d'\in\mathbb{R}^2$ と書く (図 5.2)．

b,c を結ぶ対角線ともう一方の対角線との交点の内分比はどちらの 4 角形でも同じなので，この交点 e は 2 つの 4 角形において共通である．したがって，残りの頂点 d,d' は原点と e を結ぶ直線上になければならない．つまり $d=\lambda e, d'=\mu e$ であるが，こちらの対角線でもやはり内分比が等しいので $\lambda=\mu$，つまり $d=d'$ である．これは 2 つの 4 角形が (頂点のうち 3 点をアフィン変換によって一致させれば) 一致してしまうことを意味している． ∎

この定理の証明を眺めれば容易に分かることであるが，アフィン変換による 4

---

[4] 例 5.9 のときと同様に，内分比 $s:t\ (s+t=1)$ の内分点と言うとき，s,t が負，あるいは 1 より大のときには "外分点" と解釈することにする．

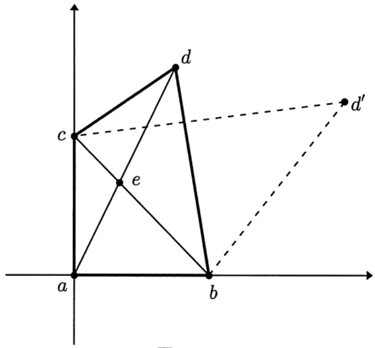


図 5.2

角形の合同類はほぼ第一象限の点に対応している．つまり，4 つの頂点のうち 3 点を定理の証明のように指定してしまうと，残りの頂点 $d \in \mathbb{R}^2$ の情報が 4 角形の合同類を決定する．この頂点は第一象限内になければならない．上で『ほぼ』と述べたのは，頂点を入れ替えることで，第一象限の点のうち直線 $y = x$ で折り返した 2 点に対応する 4 角形は互いに合同であるからである．

内分比を使わずに次のように言うこともできる．

系 5.15　平面内の 2 つの 4 角形がアフィン合同であれば，対角線によって 4 角形を 2 つの 3 角形に分けたとき，その 3 角形の面積比は同じである．逆に，2 つの対角線どちらに関しても，4 角形を分割した 3 角形同士の面積比が同じならば，2 つの 4 角形はアフィン合同である．

この系を式で表すと，次のようになる．

系 5.16　一般の位置にある[5] 4 点 $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$ と $a', b', c', d' \in \mathbb{R}^2$ がこの順序で互いにアフィン変換によって写りあうための必要十分条件は

$$\frac{\det(d-a, c-a)}{\det(d-b, c-b)} = \frac{\det(d'-a', c'-a')}{\det(d'-b', c'-b')},$$

$$\frac{\det(a-c, b-c)}{\det(a-d, b-d)} = \frac{\det(a'-c', b'-c')}{\det(a'-d', b'-d')}$$

[5] この場合，一般の位置にある 4 点とは，4 角形の頂点をなすような 4 点という意味である．あるいはもう少し一般に，どの 3 つの点も一直線上にはないような 4 点としても系は成り立つ．

が成り立つことである．

つまり，4 点の配置に関しては，$\det(d-a, c-a)/\det(d-b, c-b)$ の形の不変式が 4 角形の合同類を分離しているわけである．

演習 5.17　一般の位置にある n 点配置が互いにアフィン変換で写りあうための条件について考えてみよ．

5.4　2 次曲線のアフィン合同類

点配置，あるいは多角形のアフィン合同類だけを考えていてもアフィン幾何独特の面白い問題にはなかなか行きあたらない．そこで，この節では 2 次曲線，すなわち楕円・双曲線・放物線のアフィン合同類を考えてみることにしよう．

アフィン変換群による 2 次曲線への作用は，合同変換の 2 次曲線への作用と全く同じ式で表すことができる．復習をかねて，簡単に振り返っておこう．

まず，平面 (実) 2 次曲線全体を

$$\mathscr{Q} = \left\{ F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \right\}$$

で表し，これを係数のなす 3 次の対称行列 $\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$ と同一視するのであった．具体的には対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \text{ と } v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \text{ に対して}$$

$$\begin{aligned} {}^t v A v &= (x, y, 1) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = F(x,y) \end{aligned}$$

によって 2 次式を対応させる．このとき，2 次式をゼロでない定数倍しても同じ 2 次曲線 $F(x,y) = 0$ を表していることに注意する．

一方，アフィン変換 $g \in A_2$ は

$$A \mapsto {}^t g^{-1} A g^{-1}$$

のように働くのであった (式 (4.6) 参照)．ここでアフィン変換群は

$$A_2 = \left\{ g = \begin{pmatrix} h & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\ v \in \mathbb{R}^2 \right\} = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) & \mathbb{R}^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と実現されている．そこで，g^{-1} を g と取り替えて，上の作用を書き下す．そのために，行列 $A \in \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$ を

$$A = \begin{pmatrix} X & u \\ {}^t u & f \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

と表すと，g の A への作用は

$${}^t g A g = \begin{pmatrix} {}^t h X h & {}^t h X v + {}^t h u \\ {}^t v X h + {}^t u h & f + {}^t v X v + 2u \cdot v \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

である．

さて，§4.3 でやったように，非退化な 2 次曲線のみを考えることにして，以下 $\det A \neq 0$ を仮定する．このとき，既にユークリッド合同変換群による A の標準形が得られている．その形は $\det X$ が消えているか否かで結果が異なっていた．そこで，$\det X$ の値で場合分けして考えよう．

(a) $\det X \neq 0$ のとき．$A = \mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ の形がユークリッド合同変換による標準形である (式 (4.11) 参照)．ただし $\det X \neq 0$ だから，$\alpha, \beta \neq 0$ である．さらに $\det A \neq 0$ も仮定しているので $\gamma \neq 0$ でもある．

この標準形をさらにアフィン変換で簡単にすることを考えよう．対称行列 A に対応する 2 次式は $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma = 0$ であるが，既に注意したように，平面曲線としては両辺をゼロではない定数倍しても同じ曲線を表す．そこで，両辺を γ で割って，最初から $\alpha x^2 + \beta y^2 + 1 = 0$ の形であるとしてもよい．このとき，

$$g = \mathrm{diag}(\sqrt{|\alpha|}, \sqrt{|\beta|}, 1)$$

ととると，

$${}^t g^{-1} A g^{-1} = \mathrm{diag}(\alpha/|\alpha|, \beta/|\beta|, 1)$$

となる．$\alpha/|\alpha|$ は α の符号に他ならないから ± 1 である．したがって，2 次式として $\pm x^2 \pm y^2 + 1 = 0$ (複号任意) を得るが，必要ならば両辺に (-1) を掛けることによって，結局 $x^2 + y^2 = \pm 1$ または $x^2 - y^2 = \pm 1$ の形にできる．

$x^2 + y^2 = -1$ は実平面では空な図形を表すので，もともとの 2 次曲線が空であるということになる．一方 $x^2 + y^2 = 1$ はもちろん単位円を表している．

また $x^2 - y^2 = \pm 1$ はいずれも $y = \pm x$ を漸近線に持つ直角双曲線であるが，原点を中心とする $90°$ 回転によって互いに移りあう．したがってアフィン合同

による代表として $x^2-y^2=1$ を取れば十分である．

(b) $\det X=0$ のとき．このときは，ユークリッド合同変換による 2 次曲線の標準形として $\alpha x^2+2ey=0$ が取れることが分かっている (式 (4.12) 参照)．この標準形の両辺を $2e\neq 0$ で割ることによって，最初から $2e=1$ としてよい．さらに $\alpha x^2+y=0$ を $g=\mathrm{diag}(\sqrt{|\alpha|},1,1)$ でアフィン変換することによって，$\pm x^2+y=0$ の形に帰着することができる．このとき，$-x^2+y=0$ と $x^2+y=0$ は x 軸に関する鏡映によって互いに写りあうから，結局，放物線 $y=x^2$ をアフィン合同に関する標準形とすることができる．

さて，上の考察によって，任意の楕円は単位円 $x^2+y^2=1$ に，任意の双曲線は $x^2-y^2=1$ に，そして放物線は $y=x^2$ にアフィン変換によって写すことができることが分かる．

これを不変式論の立場から眺めるには，§4.3 の式 (4.10) で導入された射影的不変量 P_1, P_2 が参考になる．

$$P_1=\frac{\mathrm{trace}\,X}{\sqrt[3]{\varDelta}},\quad P_2=\frac{\det X}{\sqrt[3]{\varDelta^2}},\quad \varDelta=\det A \tag{5.5}$$

まず P_2 がアフィン変換によってどのように変化するのかを見ておこう．

補題 5.18 2 次曲線 C を考える．アフィン変換 $g\in A_2$ によって C を写した曲線を $g\cdot C$ で表すとき，

$$P_2(g\cdot C)=(\det h)^{-2/3}P_2(C)$$

が成り立つ[6]．つまり P_2 はアフィン変換群に対する相対不変有理式である．

証明 対称行列 A は g の作用で ${}^tg^{-1}Ag^{-1}$ と変化するから，

$$\varDelta(g\cdot A)=\det({}^tg^{-1}Ag^{-1})=(\det g)^{-2}\det A=(\det h)^{-2}\varDelta(A)$$

である．一方，X は ${}^th^{-1}Xh^{-1}$ と変換されるから，$\det X$ もやはり $(\det h)^{-2}$ 倍される．この両式を P_2 の式に代入すれば，補題の式を得る． ∎

この補題より，P_2 の正負や $P_2=0$ であるか否かはアフィン変換の作用によって変わらないことが分かる．ところが，式 (4.15) を見ると分かるように，2 次曲線が楕円であるのか，双曲線であるか，あるいは放物線であるかという情報

---

[6] もちろん $P_2(C)$ などは P_2 を C の関数と考えるという意味である．

は P_2 の正・負，ゼロであるか否かによって決まっているのであった．

したがって，アフィン変換によって楕円は楕円にしか映らない．また，双曲線は双曲線に，そして放物線は放物線に写る．既に得られた標準形の形と共に，これをまとめると次のようになる．

定理 5.19　非退化平面 2 次曲線のうち，楕円は単位円 $x^2+y^2=1$ と，双曲線は $x^2-y^2=1$ と，そして放物線は $x^2=y$ とアフィン合同である．つまり，非退化 2 次曲線のアフィン合同類は 3 つしかない．

この定理に少しばかり余計な注意を付け加えておこう．あまり技術的な細部に興味のない読者はここを読み飛ばしても構わない．

最初の注意は，この定理は実平面上の実アフィン変換群による作用を問題にしているという点である．例えば単位円の方程式 $x^2+y^2=1$ は x,y を複素数としても立派に意味を持ち，このような関係式を満たす複素数の組 $(x,y)\in\mathbb{C}^2$ の全体は複素平面上の“単位円”とでもいうべき図形である．また，アフィン変換も

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u$$

の形で，h を複素数を成分とする 2 次の正則行列，$u\in\mathbb{C}^2$ として，“複素平面”つまり $\mathbb{C}^2$ の変換を定める．このように考えたとき，複素 2 次曲線のアフィン合同類はたった 2 つしかなくなる．それは単位円と放物線である．なぜそのようになるかは，読者自らの楽しみとしておこう．

二番目の注意は，補題 5.18 に関するものである．この補題の証明において，$\Delta(A)$ および $\Xi(A):=\det X$ はどちらもアフィン変換群の相対不変式であって，しかも同じ指標 $(\det g)^{-2}$ を持つことが示された．このとき，Δ, Ξ が多項式環 $\mathbb{C}[\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})]$ の基本相対不変式であることを示すことができる．特に Δ/Ξ はアフィン変換群の不変有理式である!

このような不変式がアフィン幾何学における不変量を決めていると期待するのは自然なことであるが，残念ながらこの不変有理式は2 次曲線に付随する不変式ではない．というのは，2 次曲線の方程式は両辺を定数倍しても変わらないから，2 次曲線に付随する不変式 F は，定数 $\lambda\in\mathbb{R}$ と $A\in\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$ に対して $F(\lambda A)=F(A)$ を満たしていなければならない．これを満たすためには P_2

のように Δ, Ξ の冪が分母・分子で微妙に食い違っていなければならないのである．例えば

$$\Delta(\lambda A) = \lambda^3 \Delta(A), \quad \Xi(\lambda A) = \lambda^2 \Xi(A)$$

であるから Δ^2/Ξ^3 は定数倍に関して不変であるが，これはもはやアフィン変換に関して不変ではない．実際，アフィン変換に関する 2 次曲線の不変有理式は定数しかないことを示すことができる[7]．

5.5 アフィン平面幾何の定理

アフィン平面幾何の系統だった解説は本書の目的ではないが，前節までに苦労して得られた事実や定理がアフィン平面幾何にいかに有効に使われるかをいくつかの例をあげて述べておきたい．

既にチェバの定理とメネラウスの定理はアフィン幾何学の定理であると述べた．この 2 つの定理はあまりに有名であるが，アフィン幾何学の定理とは，アフィン変換によって不変な図形の性質を主張する定理であって，例えば次のような性質が考えられるであろう．

- 同一直線内における点配置と線分比
- 一組の直線または辺の平行性
- 曲線や直線などの交点
- 曲線や直線の接点
- 3 角形の面積比 (あるいはもっと一般に図形の面積比)
- 楕円・双曲線・放物線などの 2 次曲線の性質

これらの性質のうち，まだ解説していないものは接点に関する性質である．曲線の接点においては曲線同士の接する度合いというものが定義でき，これを交点の**重複度**と呼ぶ．通常の交点では重複度が 1 であり，我々が曲線が接していると認識する場合には，この重複度は 2 以上である．

アフィン変換群の作用では交点の重複度が保たれるのだが，これを示すにはまず，交点の重複度とは何かを正しく理解しなければならない．重複度の正確な定義は思いのほか骨の折れる作業であり，代数幾何や可換環論の知識が要求

[7] しかし，この事実を示すにはかなりの準備と代数幾何に関する初歩的な知識が必要である．

されるので，本書では述べない．しかし，一方で接点を避けて通ると面白い定理の大部分をあきらめざるをえなくなるので，ここでは暗黙の了解としてアフィン変換群によって交点の重複度が変化しないことを仮定して，話を先に進めることにしよう．

5.5.1　3 角形と重心定理

最初に扱うのは，3 角形に関する初等的な定理である．既に中点連結定理については述べたが，その次に有名なのが次の**重心定理**であろう．

定理 5.20　3 角形の各頂点と対辺の中点を結ぶ直線は唯一点で交わる．この点を 3 角形の**重心**と呼ぶ．

3 角形はアフィン変換で写してもやはり 3 角形である．また，辺の中点はアフィン変換が線分比を保つことから，やはり辺の中点に写る．さらに直線の交点はアフィン変換によって対応する直線の交点へと写るので，定理の主張では，アフィン変換群によって不変な性質しか言及されていない．このようなとき，定理は “アフィン幾何の定理である” と言いあらわす．

ユークリッド幾何では，このほかに距離や角度が保存されるため，距離・角度・面積などが定理の主張に入ることが許されるが，アフィン幾何の定理はこのような量を含まない．しかし，もちろんアフィン幾何の定理はユークリッド幾何の定理でもある．

さて，定理の証明はどうすればよいのか? ユークリッド的ではなくアフィン幾何的な証明を考えてみよう．

定理 5.20 の証明　任意の 3 角形はアフィン変換群によって正 3 角形とアフィン合同である．正 3 角形においては，定理の主張は明らかである．例えば，頂点から対辺の中点へ引いた直線を 2 本考え，その交点を G とする．残りの頂点とこの G を結ぶ直線がその対辺を二等分することを示せばよいが，これは 3 角形の (ユークリッド幾何における) 合同を用いて簡単に示すことができる． ∎

この証明のポイントは，正 3 角形に対して証明をすればよいこと，そしてその正 3 角形における証明には通常のユークリッド幾何の強力な道具を存分に使ってもよいという点である．もちろん正 3 角形が都合が悪ければ，直角 3 角形や

直角二等辺 3 角形を用いてもよい．どのような 3 角形でも，こちらの気に入ったものを使って証明しておけば，任意の 3 角形に対して定理は成り立つのである．

5.5.2 ガウスの内接楕円とその一般化

次に楕円と 3 角形を組み合わせた定理を紹介しよう．

定理 5.21 (**ガウス**[8]**の内接楕円**) 3 角形の各辺の中点においてこの 3 角形に内接するような楕円が唯一つ存在する．これを**ガウスの楕円**と呼ぶ．

ここでもこの定理のアフィン幾何的な証明を考えてみよう．まず注意すべきなのは，この定理がアフィン幾何の定理かどうかという点であるが，3 角形や，中点，接点，そして楕円という概念はすべてアフィン変換群で不変な概念であって，定理の主張にはそれらの概念しか使われていないから，たしかにこの定理はアフィン幾何に属する．

証明には，やはりすべての 3 角形がアフィン変換によって合同であることを使おう．そこで，与えられた 3 角形は正 3 角形であるとしてよい．正 3 角形の各辺の中点で接するような “楕円” は確かに存在する．それは正 3 角形の内接円である．したがって，ガウスの楕円は確かに存在する．

その一意性を示すには，次のようにすればよい．正 3 角形に各辺の中点で接する別の内接楕円があったとすると，この楕円を円に写すようなアフィン変換 g が存在する．正 3 角形を g で写した 3 角形 $\triangle ABC$ を考えると，アフィン変換が中点を保つことから，この円は $\triangle ABC$ に各辺の中点で内接する．そうすると容易に分かるように $\triangle ABC$ は正 3 角形でなくてはならない．相似変換 (とユークリッド合同変換) によって $\triangle ABC$ を最初の正 3 角形に (頂点毎に) 一致させることができるが，g とこの変換の合成を g' と書くと，g' は最初の正 3 角形の各頂点を不変にし，さらに内接楕円を内接円に写す．しかし，定理 5.12 によってこのようなアフィン変換は恒等変換しかなく，楕円はもともと内接円であったことになる．

---

[8] Gauss, Carl Friedlich (1777–1855). 天文学者，物理学者にして傑出した数学者でもあった．ガウスの名前を冠した定理や名称は数多い．ガウス分布，ガウスの発散定理，ガウス曲率，ガウス・ボンネの定理，ガウス・グリーンの定理，ガウスの超幾何関数 ... 磁気の単位はガウスであるし，代数学の基本定理の証明や素数定理の発見，平方剰余の相互法則の発見等でも有名である．

この定理をユークリッド幾何によって，任意の 3 角形の場合に証明することは至難の業である．解析的手法に訴える方法もあるが，煩瑣な計算を伴う．何よりもユークリッド幾何ではこのような定理を夢想だにできないが，アフィン幾何においては，例えばその内接楕円の存在自身は当たり前である点が重要である．

この手法を用いると次のような一般化も容易に思いつくことができるであろう．この定理は特別な場合としてガウスの楕円定理を含んでいる．

定理 5.22　$\triangle ABC$ において，頂点 A, B, C の対辺上の点をそれぞれ P, Q, R とする．このとき $\dfrac{AR \cdot BP \cdot CQ}{RB \cdot PC \cdot QA} = 1$ ならば，点 P, Q, R において $\triangle ABC$ に内接する楕円が唯一つ存在する (図 5.3).

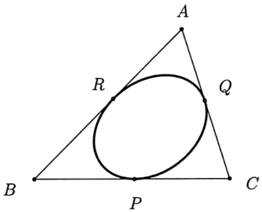


図 **5.3**　3 角形の内接楕円

証明　まず，このような内接楕円の存在を示そう．それにはまず，アフィン変換によって $\triangle BPR$ を $BP = BR = 1$ となるような二等辺 3 角形に写す．このとき，条件 $\dfrac{AR \cdot BP \cdot CQ}{RB \cdot PC \cdot QA} = 1$ は，アフィン変換によって不変であるから，$\dfrac{AR}{PC} = \dfrac{QA}{CQ}$ が成り立つ．つまり $AR : CP = AQ : CQ$ が成り立っている．また $BP = BR = 1$ としたので 2 辺 BA および BC の長さはアフィン変換で写す前の元の 3 角形の情報によって決まってしまうことに注意しよう．

さて，アフィン変換によって $\triangle BPR$ を二等辺 3 角形にするだけでなく，その頂角 $\theta = \angle RBP$ も自由に選べるので，これをうまく選んで $AR = AQ$ とできる．すると $CP = CQ$ でもある．

このとき，$\triangle ABC$ の内接円は点 P, Q, R において 3 角形に接していることが容易に分かる．そこでこの 3 角形をもとの 3 角形にアフィン変換で戻せば，

P, Q, R において接する内接楕円が得られる．

次に，このような内接楕円の一意性を示そう．

そこで内接楕円が 2 つあったとして，それぞれ，アフィン変換により内接楕円を内接円に写す．このとき，アフィン変換を施すことで得られた 3 角形は異なっているかもしれないが，アフィン変換によって，例えば線分比 $AR : RB$ などは保存されている．このことから，2 つの 3 角形は (ユークリッド幾何の意味で) 相似でなければならないことが容易に分かる．

そこで，相似変換 (と必要ならば平行移動や回転移動) を用いて 2 つの 3 角形をピッタリ頂点まで込めて重ねることができるが，相似変換では円は円に写るので，内接円同士もピッタリ重なる．結局，2 つの内接楕円は頂点を変えないアフィン変換で重なり合うことが分かるが，定理 5.12 によりそのようなアフィン変換は恒等変換しか存在しない．つまり 2 つの内接楕円はもともと同じ楕円であったことになる．∎

5.5.3　2 次曲線の極線と極点

楕円の極線と極点をまず定義しよう．

定義 5.23　楕円外の 1 点 P を取り，この点から楕円 E に引いた 2 本の接線を ℓ_1, ℓ_2 とし，E との接点をそれぞれ Q_1, Q_2 とする．このとき，直線 $p = Q_1Q_2$ を P に対する**極線**，点 P を極線に対する**極点**と呼ぶ．

これは極点が楕円の外にある場合だが，では内側にあるときはどうするのか? その定義の基となるのが次の定理である．

定理 5.24　楕円 E 内の 1 点 P を通る直線 m と楕円との交点を Q_1, Q_2 とする．この 2 点 Q_1, Q_2 における楕円の接線 ℓ_1, ℓ_2 の交点は，m の取り方に依らず，点 P のみによって決まる定直線 p 上にある．このとき，直線 p を，P を**極点**とする**極線**と呼ぶ．

この定理において，楕円内の 1 点 P は楕円の中心ではないとする[9]．というのも P が楕円の中心のときには，定理の主張における接線 ℓ_1, ℓ_2 は平行で交点を持たないからである．この場合に上の定理をどう解釈するかは射影幾何学の問題である．これについては後述する．

---

[9] 楕円の中心とは長軸と短軸の交点のことである．この "中心" という概念はアフィン変換で不変な性質である．したがって，アフィン変換で楕円を円に写すと，楕円の中心は円の中心に写る．

証明　この定理もアフィン幾何の定理であることに注意しよう．そこで，楕円 E をアフィン変換によって単位円 $x^2+y^2=1$ に写し，この単位円に対して定理を示せばよい．さらに適当に回転することにより，$P=(0,a)$ は y 軸の非負の部分にあるとしてよい．そこで $1>a>0$ とする．

このとき，定理の主張にある極線 p の方程式は $y=1/a$ であることを示そう．

そのために P を通る直線 m を引き，m と単位円との 2 つの交点を Q_1, Q_2, その点における単位円の接線を ℓ_1, ℓ_2 とする．Q_1Q_2 の中点を M, さらに ℓ_1, ℓ_2 の交点を N とする．単位円の中心は原点 O であるが，このとき，$ON \cdot OM = 1$ であることを示そう．

$\triangle OMQ_2 \backsim \triangle OQ_1N$ より，$OM : OQ_2 = OQ_1 : ON$ であるが，OQ_1, OQ_2 は単位円の半径なので $OQ_1 = 1 = OQ_2$ である．これより $ON \cdot OM = 1$ が従う．

さて，点 $(0,1/a)$ を R と書くと，$OP \cdot OR = 1 = ON \cdot OM$ より $OM : OP = OR : ON$ が成り立つ．$\triangle OMP$ と $\triangle ORN$ は一角を共有し，対応する 2 辺の比が等しいので相似である．特に $\triangle ORN$ は $\angle ORN = \pi/2$ の直角 3 角形である．これは N が直線 $y=1/a$ 上にあることを意味している．　■

この定理のポイントは，要するに極線定理を単位円に対して証明すればよいという点にある．単位円に帰着した後は，解析幾何を使おうが，上の証明のように初等幾何的に証明しようが，煮るなり焼くなり好きにできる．これがアフィン幾何における証明の強みである．

第6章 実射影平面

射影幾何学では，これまで見てきたユークリッド幾何学やアフィン幾何学とは異なり,『無限遠点』という概念を導入し，これを強力な道具として使う．無限遠点というと有限の世界には無関係のように思われるが，そうではなく，ユークリッド幾何やアフィン幾何の定理を証明するにも力を発揮する．無限遠点を導入する手法を数学では『コンパクト化』と呼ぶが，これは現代数学にはなくてはならない概念の 1 つである．コンパクト化することによって，無限遠にある点を有限の点に持ってきたり，あるいはその逆に有限の点を無限遠に飛ばしたりすることができるようになる．

このように射影幾何の世界は斬新かつ革新的なアイディアに満ちているが，まさにその理由によって最初に学ぶときには戸惑いもあるだろう．そこで，射影空間の本格的な導入は第 9 章に譲り，この章ではまず初等的な平面射影幾何学について考えたい．

6.1 無限遠点と無限遠直線

ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 上の 2 直線の位置関係は，1 点で交わるか，交わらないか，あるいは一致するかのいずれかである．この交わらない場合と一致する場合を総称して “平行である” と言う．しかし，しばしばこの平行性が定理の主張や証明において余分な場合分けを発生させ，煩瑣な考察を要求することがある．例えば我々は極線定理 5.24 において，極点の位置を中心以外にとらねばならなかった．この理由を，簡単のために一般の楕円ではなく，円の場合に考えてみよう．

極線定理とは，円の内部の中心以外の任意の 1 点 P に対して，P を通る直線 m と円との交点における 2 本の接線が交わる点が，極線と呼ばれる，m の

取り方にはよらない直線上にある，というものであった．このとき P を極線に対する**極点**と呼ぶ (図 6.1).

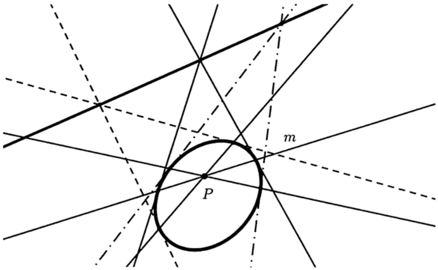


図 6.1　極線と極点

さて，もし極点 P が円の中心になったとすると，極点を通る直線 m と円との交点はちょうど直径の両端となり，その 2 交点における円の接線は平行であって，交わらない (図 6.2).

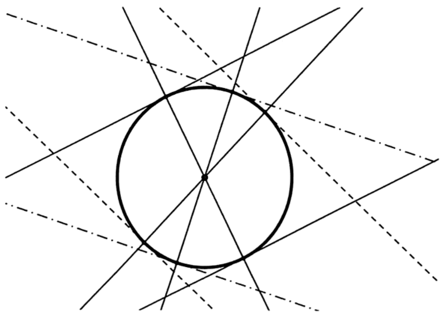


図 6.2　円の中心が極点の場合

しかし，ここで，仮想的にこの平行な 2 接線に交点を付け加えてみよう．この場合，P を通るどんな直線 m を考えてもこの仮想的な交点は同じ直線上にあるはずであるから，直線 m ごとに 1 つづつ仮想的な交点を付け加えてゆくと仮想的な直線ができるだろう．円の中心を極点としたとき，この直線を極線と定めると定理には例外がなくなり，すっきりする．しかも，極点が円の中心でない場合に比較して，円の中心においては証明そのものが著しく簡単であること

に気がつくであろう．このような仮想的な点を**無限遠点**，仮想的な直線を**無限遠直線**と呼ぶ．

この直線をなぜ無限遠直線と呼ぶかは次のように考えてみると明らかになる．まず，中心以外の円内の点 P を考え，その点を極とする極線をとる．円の中心を O とすると，定理 5.24 の証明にあるように，O から極点 P までの距離と，O から極線までの距離の積は円の半径の自乗に等しい．したがって，極点 P を中心に近付けると極線は反比例して遠ざかってゆく．P が O に一致する極限では，この極線は無限遠に消えてなくなってしまう．このように考えると P の中心への近づき方によって異なる無限遠直線が現れるような気もするが，それは合理的でない．というのも 1 つの極点に対して 1 本の極線が対応していなければ，定理の主張にやはり例外が現れてしまうからである．

以上の考察を踏まえて，ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ に無限遠点を付け加えた平面を構成しよう．

我々は本来無限の彼方にあるものを有限の世界に持ち込みたいが，そのような例は地平線や水平線に見ることができる．実際には無限の彼方にある“地点”が，地平線では仮想的な直線となって我々に認識されている．これを数学的に扱うには次のようにすればよい．

まず，ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ を 3 次元空間内の xy 平面 H と同一視する．次に x 座標が 1 であるような平面，つまり yz 平面を x 軸方向に 1 だけ平行移動した平面 H' を用意して，z 軸上の点 $P=(0,0,1)$ からの点射影 π_P によって，平面 H を H' 上に射影する (図 6.3 参照)．このとき，H は実際の平面，H' はスクリーン (あるいは網膜と言ってもよい)，P は光源 (あるいは視点) の役割を果たす．ただしスクリーンそのものは透明で，光源はスクリーンで遮られることはないと考える．

これを式で表してみよう．平面 H の方程式は $z=0$ であり，H 上の点は $Q=(x,y,0)$ と書けている．そこで P と Q を通る直線 ℓ を考え，ℓ と H' の交点を $R=(1,\xi,\eta)$ で表す．平面 H' は方程式 $x=1$ によって定義されていることに注意しよう．このとき，射影 π_P によって Q は R に写ることになる．ℓ 上の点はパラメータ $t\in\mathbb{R}$ を用いて，

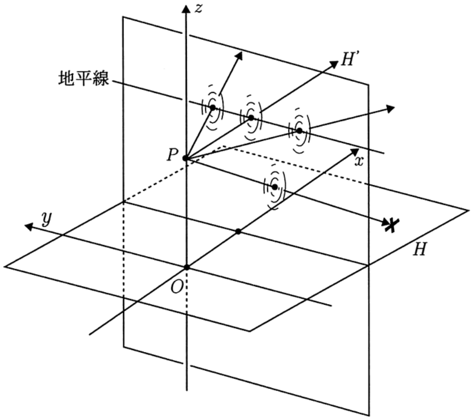


図 6.3　点射影

$$t(x,y,0)+(1-t)(0,0,1)=(tx,ty,1-t)$$

と書けているから，これが平面 H' と交わる点では，$tx=1$, $\therefore\ t=1/x$ となる．したがって

$$R=(1,\xi,\eta)=(1,y/x,1-1/x)$$

である．この計算から

$$\pi_P:(x,y)\to(\xi,\eta),\quad \begin{cases}\xi=y/x\\ \eta=1-1/x\end{cases}$$

が射影 $\pi_P:H \dashrightarrow H'$ を定めることが分かる．ただし π_P は $x=0$ では定義されていないから，通常の写像とは異なっている．このような写像を**有理写像**と呼ぶ．破線の矢印 $\dashrightarrow$ は有理写像を表すのに用いられる記号である．

このとき，平面 H 上の直線が π_P によって何に写るのかを見てみる．以下 H 上の点は $(x,y,0)$ の代わりに座標 (x,y) を用いて表すことにすると，H 上の一般の直線 ℓ はパラメータ t を用いて，

$$\ell:(a,b)+t(u,v)\quad(t\in\mathbb{R})$$

と書ける．ここで (a,b) は ℓ が通過する 1 点，(u,v) は直線の方向を表す．直線

上の点は，π_P によって

$$\pi_P(a+tu,b+tv)=\left(\frac{b+tv}{a+tu},1-\frac{1}{a+tu}\right)$$

と写っている．この写ってきた点は，$u\neq 0$ なら

$$\begin{aligned}\left(\frac{b+tv}{a+tu},1-\frac{1}{a+tu}\right)&=\left(\frac{b-\frac{v}{u}a+(a+tu)\frac{v}{u}}{a+tu},1-\frac{1}{a+tu}\right)\\&=\left(\frac{v}{u},1\right)+\frac{1}{a+tu}\left(\frac{bu-va}{u},-1\right)\\&=\left(\frac{v}{u},1\right)-\frac{1}{u(a+tu)}\left(\begin{vmatrix}a&u\\b&v\end{vmatrix},u\right)\end{aligned}$$

と変形でき，$s=-1/u(a+tu)$ をパラメータにとると，

$$(\xi,\eta)=\left(\frac{v}{u},1\right)+s\left(\begin{vmatrix}a&u\\b&v\end{vmatrix},u\right)$$

と表されるから，直線 ℓ の像は点 $\left(\dfrac{v}{u},1\right)$ を通り方向が $\left(\begin{vmatrix}a&u\\b&v\end{vmatrix},u\right)$ の直線になる．一方 $u=0$ のときには $a\neq 0$ なら

$$\begin{aligned}\left(\frac{b+tv}{a+tu},1-\frac{1}{a+tu}\right)&=\left(\frac{b+tv}{a},1-\frac{1}{a}\right)\\&=\left(\frac{b}{a},1-\frac{1}{a}\right)+s(1,0)\quad\left(s=t\frac{v}{a}\text{ と置いた}\right)\end{aligned}$$

と変形できて，これは，点 $\dfrac{1}{a}(b,a-1)$ を通り，方向が $(1,0)$ の直線を表している．

さて，無限遠点では $t\to\pm\infty$ の極限を考えることになるから，もし $u\neq 0$ なら上の式より

$$\lim_{t\to\pm\infty}\pi_P(a+tu,b+tv)=\lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{b+tv}{a+tu},1-\frac{1}{a+tu}\right)=\left(\frac{v}{u},1\right)$$

となることが分かる．これはもはや無限遠方にあるわけではなく，通常の点である．ここで H' の座標も $(1,\xi,\eta)$ の代わりに (ξ,η) で表すことにすると，このような無限遠方の極限点は H' 上の $\eta=1$ という直線上にあって，まさしく“地平線”を構成していることが分かる．また，このような地平線上の極限点は直線 ℓ の通過する点には依らず，方向のみで決まっていることに注意しよう．したがって，H 上の平行な直線は同じ極限点を持ち，2 つの平行な直線は H' 上

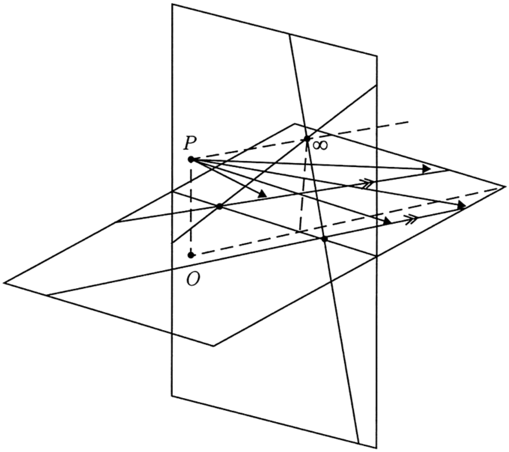


図 6.4　2 本の直線は無限遠点で交わる

では地平線において交わる (図 6.4).

一方，直線の方向が $(0,1)$ のときには，H' 上においても直線上の点は無限遠方に遠ざかる.

6.2　射影平面

前節で無限遠直線を有限の平面上に実現したが，そのときは平面 H と H' の役割や座標系の入れ方が対称ではなかった．無限遠点をより系統的に扱うため，この節以降では，座標系の入れ方を対称にしておこう.

3 次元空間内に，平面 H_1, H_2, H_3 を次のように用意する.

$$H_1 = \{(1,\eta,\zeta) \mid \eta,\zeta \in \mathbb{R}\} \leftrightarrow x = 1,$$

$$H_2 = \{(\xi,1,\zeta) \mid \xi,\zeta \in \mathbb{R}\} \leftrightarrow y = 1,$$

$$H_3 = \{(\xi,\eta,1) \mid \xi,\eta \in \mathbb{R}\} \leftrightarrow z = 1.$$

このとき，原点 $O = (0,0,0)$ に光源を置き，各平面の対で射影を計算してみよう．例として $\pi_{31} : H_3 \dashrightarrow H_1$ を計算する．まず $(\xi,\eta,1) \in H_3$ を取り，この点

と原点 O を結ぶ直線を考えると，それは

$$t(\xi,\eta,1) \quad (t\in\mathbb{R}: \text{パラメータ})$$

とパラメータ表示される．これと H_1 との交点は $t\xi=1$ と置いて，$t=1/\xi$, したがって

$$\frac{1}{\xi}(\xi,\eta,1)=\left(1,\frac{\eta}{\xi},\frac{1}{\xi}\right)\in H_1$$

が π_{31} による像である．座標で書くと，

$$\pi_{31}(\xi,\eta,1)=(1,\eta/\xi,1/\xi) \quad (\xi\neq 0)$$

となる．このとき，無限遠直線は H_1 において $\{(1,u,0)\mid u\in\mathbb{R}\}$ で与えられる．同様にして $\pi_{32}: H_3 \dashrightarrow H_2$ を計算すると，

$$\pi_{32}(\xi,\eta,1)=(\xi/\eta,1,1/\eta) \quad (\eta\neq 0)$$

となる．このとき H_3 において $\xi=\eta=0$ の場合，つまり点 $(0,0,1)$ では，π_{31} でも π_{32} でもその表示式の分母に 0 が現れるため，有理写像が定義できない．しかし，平面 H_3 を座標 (ξ,η) によってユークリッド平面と同一視するとき，点 $(0,0,1)\in H_3$ は原点にあたっており無限遠には寄与していない．したがって 2 つの有理写像 π_{31} と π_{32} を考えれば，H_3 の無限遠点はすべてカバーできる．一方，平面 H_3 上の同じ無限遠の方向が π_{31} によって H_1 に，そして π_{32} によって H_2 の無限遠点として異なる 2 平面の地平線上に現れるので，これらは同一視を行う必要がある．もちろん有限の点でも

$$H_1\ni(1,\eta/\xi,1/\xi)\xleftarrow{\pi_{31}}(\xi,\eta,1)\xrightarrow{\pi_{32}}(\xi/\eta,1,1/\eta)\in H_2$$

であるから，$(1,\eta/\xi,1/\xi)\in H_1$ と $(\xi/\eta,1,1/\eta)\in H_2$ は同じ H_3 の点に対応しており，同一視すべきである．

他の平面の組についても有理写像 π_{ij} は同様に計算できるが，この計算結果を (x,y,z) の変数によって次のように表すと分かりやすい．まず，平面 H_3 上の点 $(\xi,\eta,1)$ に対して，

$$(\xi,\eta,1)=\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right) \quad (z\neq 0)$$

と置く．すると上の計算結果から

$$\pi_{31}\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right)=\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right) \quad \left(x\neq 0,\ z\neq 0\right)$$

と書くことができる．他の射影も計算してみると

$$\pi_{12}\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=\left(\frac{x}{y},1,\frac{z}{y}\right),$$

$$\pi_{32}\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right)=\left(\frac{x}{y},1,\frac{z}{y}\right)$$

などとなり，このように表しておくと π_{ij} は非常に単純な有理写像になることが分かる．しかも各座標は，$x,y,z\neq 0$ のときには

$$(x,y,z)=x\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=y\left(\frac{x}{y},1,\frac{z}{y}\right)=z\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right) \tag{6.1}$$

などのように x,y,z を単に括りだした形となっている．また π_{32} と π_{31} の表示を見れば分かるように，まさしくこれらの点が有理写像によって同一視されるべき点である．

そこで，3 次元空間内の点 $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ と $(x',y',z')=(kx,ky,kz)$ $(k\in\mathbb{R}, k\neq 0)$ を同一視することにしよう．これは，(x,y,z) と (x',y',z') が原点を通る同じ直線上にあることを意味している．この関係を $(x,y,z)\sim(x',y',z')$ で表すと，$xyz\neq 0$ のとき，(6.1) 式は次のように書ける．

$$(x,y,z)\sim\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)\sim\left(\frac{x}{y},1,\frac{z}{y}\right)\sim\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right).$$

これこそがまさに有理写像によって同一視されるべき 3 平面上の点の間の関係である．以上を踏まえた上で，射影平面を次のように定義しよう．

定義 6.1 原点 $(0,0,0)$ を除く $\mathbb{R}^3$ の点 (x,y,z) を関係 $\sim$ で同一視して得られる点の全体がなす，無限遠点をも含む平面を**射影平面**と呼び，$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ で表す．これは，空間 $\mathbb{R}^3$ 内の原点を通る直線全体の集合と一致する．

射影平面上の各点は，$\mathbb{R}^3$ の点 (x,y,z) で代表されるが，座標 (x,y,z) をこの点の**斉次座標**と呼ぶ．また斉次座標 (x,y,z) を持つ $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ の点を $[(x,y,z)]$ あるいは $[x:y:z]$ と書く．

上の定義で斉次座標 (x,y,z) を導入したが，この座標は 1 つの点に対して一意には決まらず，(x,y,z) を定数倍したもの[1)]は，すべて射影平面上の同じ点の斉次座標になっていることに注意しよう．我々は $H_3=\{(\xi,\eta,1)\mid\xi,\eta\in\mathbb{R}\}$ を通常のユークリッド平面と同一視するが，このときの座標 (ξ,η) を**非斉次座標**と

1) ゼロでない定数倍．

も呼ぶ．

さて，H_3 の点と原点を結ぶ直線は，要するに空間内において xy 平面に含まれていないような直線のことである．我々は H_3 とユークリッド平面を同一視したので，ユークリッド平面に含まれていない点，つまり無限遠点の全体は $\Lambda = \{(x,y,0) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ に含まれる点を関係 $\sim$ で同一視したものである．Λ の中で原点を通る同じ直線上にあるものは関係 $\sim$ によって同一視するわけだから，無限遠点全体は xy 平面上の原点を通る直線の全体と見ることができる．

空間 $\mathbb{R}^3$ 内の原点を通る直線の全体が射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ であったから，平面 $\mathbb{R}^2$ 内の原点を通る直線の全体は**射影直線**$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ というべき対象であり，実際そのように呼ばれている．なぜ直線と呼ばれるかは次のように考えると分かりやすい．

$\mathbb{R}^2$ 内の原点を通る直線は，単位円 S^1 とちょうど 2 点で交わる．この 2 点は単位円の直径の両端であって**対蹠点**(たいせきてん)と呼ばれる．円周上の点は，対蹠点を同一視することにより原点を通る直線と一対一に対応するので，そのような対蹠点を同一視した単位円上の点全体が射影直線を構成している．

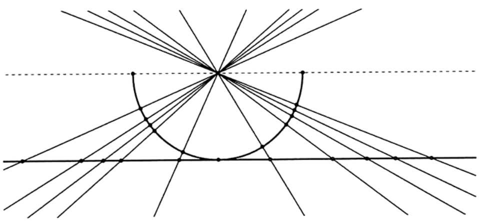


図 6.5　射影直線と実数の対応

ところで，単位円のうち y 成分が正の点は図 6.5 のように原点を通る直線を介して $\{(x,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ と一対一に対応するから，これが通常の実数 (あるいは直線上の点) を表す．一方，x 軸との交点 $(\pm 1,0)$ は対蹠点であるから，互いに同一視されて射影直線内の 1 点を表しているが，これが $x \to \pm\infty$ となったときの無限遠点である．それは次の式を見れば了解されるだろう．

$$(x,1) = x\,(1,1/x) \sim (1,1/x) \to (1,0) \quad (x \to \pm\infty).$$

まとめると，単位円の対蹠点を同一視したものは，y 成分が非負の半円とほとんど一致し，x 軸上の 2 点 $(\pm 1,0)$ を図のように同一視すると，射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ は長さが半分になった円周と同じものになる．また，無限遠点は 1 点のみ付け加わることが分かる．このようなとき $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ の**一点コンパクト化**と呼ぶ．

同じことを射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ について考えてみる．空間内の原点を通る直線を考えると，やはり単位球面 S^2 と 2 点で交わることが分かる．このような 2 点も対蹠点と呼ばれる．そこで S^2 上の対蹠点を同一視しよう．射影直線のときと同様に z 座標が正の半球はすべて直線と一対一に対応する．そこで，あとは xy 平面と単位球面との切り口である円周上にある対蹠点を同一視して，これを半球部分に付け加えると射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ が得られる (図 6.6).

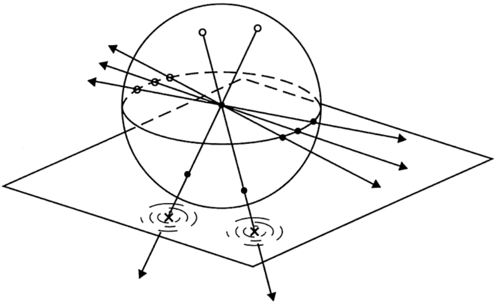


図 6.6　対蹠点の同一視

しかし，この場合は切り口の円周上の対蹠点をうまく同一視しようとしても，半球部分まで含めると我々のよく知っているような図形にはならない．これを無理に 3 次元空間内に実現しようとすると，自分自身と交わるような図形になってしまう (図 6.7，図 6.8 参照).

このように実射影平面は少し奇妙な図形になり，向き付けが不可能な閉曲面の一例である．射影平面の位相幾何学的性質は大変面白いのだが，詳細は専門書に譲る[2)].

[2)] 例えば [2], [29] などを参照してほしい．

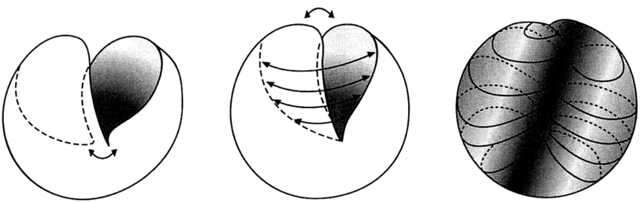


図 **6.7**　対蹠点を貼りあわせて射影平面を構成する

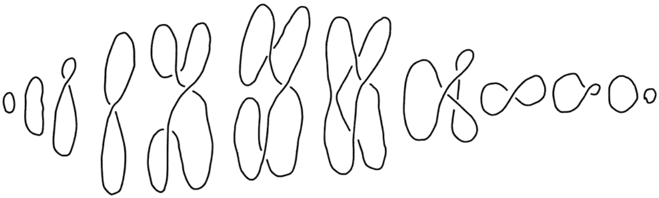


図 **6.8**　射影平面の切口

6.3　射影平面上の幾何

射影平面上の直線とか，あるいは円錐曲線 (2 次曲線) とは一体どのようなものだろうか? まず直線から考えてみよう.

6.3.1　射影直線

通常のユークリッド平面は射影平面において

$$E_2 = \{(\xi, \eta, 1) \mid \xi, \eta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

のように実現できるのであった. E_2 においては，直線の方程式は一般に

$$a\xi + b\eta + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R} \text{ は定係数})$$

と書けているが，これを斉次座標 (x, y, z) で表すと

$$a\frac{x}{z} + b\frac{y}{z} + c = 0, \quad \therefore \quad ax + by + cz = 0$$

となる. 最後の等式は (x, y, z) を定数倍しても変わらないことに注意しよう. すなわち $(x', y', z') = k(x, y, z)$ としても

$$ax' + by' + cz' = k(ax + by + cz) = 0$$

である．したがって方程式 $ax+by+cz=0$ は斉次座標の取り方に依らずに決まり，射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ 内のある図形を定めていると考えられる．a, b, c のうちいずれか 1 つがゼロでないとき[3]，この図形を**射影直線**あるいは単に直線と呼ぶ．

射影直線 $ax + by + cz = 0$ は，$a \neq 0$ または $b \neq 0$ ならば有限平面 $E_2 = \{(\xi,\eta,1) \mid \xi,\eta \in \mathbb{R}\}$ において通常の直線を切り出し，無限遠点は $[-b:a:0]$ の唯一点である．これは射影直線が $\mathbb{R}$ の一点コンパクト化であることと呼応しており，実際 $ax + by + cz = 0$ を満たす点の全体は $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ と同型である．

一方，$a = b = 0$ のときは $c \neq 0$ としてよい．このとき $cz = 0$ は $z = 0$ と同値であるから，$\{[x:y:0] \mid x, y \in \mathbb{R}, (x,y) \neq 0\}$ が射影平面における $z = 0$ を満たす点の全体である．これはちょうど無限遠点全体にあたり，$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ と同型である．そこで $z = 0$ で表される直線を**無限遠直線**と呼ぶ．

以上のことから，結局のところ，どちらの場合でも射影直線は $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ と同型である．つまり「射影直線」という用語に矛盾は生じない．

射影平面における (射影) 直線は，無限遠点の存在を除いて，ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ における直線とほぼ同様の性質を持っている．ここでは，その性質を 2 つ証明しよう．

定理 6.2　射影平面内の相異なる 2 点 $[x_1 : y_1 : z_1], [x_2 : y_2 : z_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ に対して，この 2 点を通る直線が唯一つ存在する．

証明　もとめる直線の方程式を $ax + by + cz = 0$ と置く．与えられた 2 点を通ることから，

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 = 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

であるが，この連立方程式を a, b, c について解くと，2 つのベクトル $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2)$ は一次独立であるから

$$(a,b,c) = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) \quad \text{(定数倍を除く)} \tag{6.3}$$

[3] $a = b = c = 0$ のときは方程式そのものが $0 = 0$ であって常に成り立つので射影平面全体を表す．

となり[4]，係数 (a,b,c) は定数倍を除いて唯一通りに決まることが分かる． ∎

定理 6.2 の設定のもとでさらに考察を進める．$\mathbb{R}^3$ において $u=(x_1,y_1,z_1)$, $v=(x_2,y_2,z_2)$ の一次結合

$$w=su+tv=(x_3,y_3,z_3) \quad (s,t\in\mathbb{R})$$

を考える．2 点 $[u],[v]\in\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ は同一直線 $ax+by+cz=0$ 上にあるので，(6.2) 式より

$$\begin{aligned} ax_3+by_3+cz_3 &= a(sx_1+tx_2)+b(sy_1+ty_2)+c(sz_1+tz_2) \\ &= s(ax_1+by_1+cz_1)+t(ax_2+by_2+cz_2)=0 \end{aligned}$$

が成り立ち，したがって $[w]\in\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ はこの直線上の点であることが分かる．u,v の一次結合の全体 $\{w=su+tv \mid s,t\in\mathbb{R}\}$ は $\mathbb{R}^3$ において，ベクトル u,v で張られるような原点を通る平面であるが，この平面内の原点を通る直線全体が射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ 内で，2 点 $[u],[v]$ を通る射影直線を与えているのである．

定理 6.3 射影平面内の相異なる 2 本の直線は唯一点で交わる．

証明 射影平面内の相異なる直線の方程式を

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{cases}$$

とする．もし (a_1,b_1,c_1) と (a_2,b_2,c_2) が平行ならば上の方程式は斉次座標に対して同じ方程式を与えるので，仮定よりこの 2 つのベクトルは平行でない．そこで，この連立方程式を解くと，

$$(x,y,z)=\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right) \quad (\text{定数倍を除く}) \tag{6.4}$$

となり交点は唯一点しかないことが分かる． ∎

この定理の証明を見ると，前定理 6.2 の証明とあまり違わないことに気がつくであろう．実際,『2 点を通る直線が唯一つ存在する』という主張と『2 本の直線は唯一点で交わる』という主張も直線と点を入れ替えればそっくりである．平面射影幾何では，実は点と直線に関するすべての定理がこのように直線と点を入れ替えても成り立つ．これを**点と直線の双対性**と呼ぶ．

---

[4] 式 (6.3) の右辺はベクトル (x_1,y_1,z_1) と (x_2,y_2,z_2) の外積である．

さて，相異なる 2 本の平行な直線は有限の平面 E_2 内では交わらないが，これを射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ 内で考えると上の定理より唯一点で交わっている．交点はもちろん E_2 内にはないので，無限遠点である．したがって，E_2 の相異なる平行な 2 直線は無限遠点で交わる．

ここまでくれば，§6.1 で議論した，円の中心を極点とする極線は何か，という問いに答えることができる．円の中心を極点に選ぶと，中心を通る直線は円と直径の両端で交わる．この両端で接線を引くと，2 本の接線は平行で有限平面 E_2 内では交わらないが，無限遠点で交わっている．中心を通る直線をすべて動かすと，交点の無限遠点はすべての無限遠点を尽くし，無限遠直線全体が極線として現れるのである．

6.3.2　2 次曲線

次に 2 次曲線について考えてみよう．まずは楕円から．楕円の方程式の標準形は E_2 においては

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1 \quad (a,b\neq 0 \text{ は実定数})$$

と書けるのであった．これを $\xi=x/z, \eta=y/z$ と置いて斉次座標に直すと，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$

となる．楕円は明らかに有限点の中で完結している図形のように見えるが，無限遠点を持つかどうか調べてみよう．そのために $z=0$ と置くと，

$$(x/a)^2+(y/b)^2=0, \quad \therefore \quad x=y=0$$

となる．したがって $x=y=z=0$ となり，この点は $\mathbb{R}^3$ では原点を表しているが，射影平面を定義するときには原点は除いたのであった．このことから楕円は実射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ においては無限遠点とは交わらない (という当たり前のことが分かった)．

そこで次に，双曲線を考えよう．双曲線の方程式の標準形は

$$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}=1 \quad (a,b\neq 0 \text{ は実定数})$$

であった．これを斉次座標に直すと，

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z^2$$

となる．双曲線は無限遠方まで広がっているのでおそらく無限遠点を持つであろう．そこで，無限遠直線との交点を調べるために $z=0$ と置くと，

$$(x/a)^2-(y/b)^2=(x/a-y/b)(x/a+y/b)=0$$

となる．したがって $x/a-y/b=0$ または $x/a+y/b=0$ であるが，これは無限遠点 $[a:b:0]$ と $[a:-b:0]$ にあたる．この 2 つの無限遠点は一致することはなく，双曲線は射影平面においては 2 つの無限遠点を持つことが分かる．2 つの無限遠点の存在は，双曲線が 2 本の漸近線を持つことに対応している．

双曲線の 2 つの分枝は 2 つの無限遠点を介してつながっていることに注意しよう．このようにつながった分枝をたどっていくと，双曲線はちょうど円周と同じ幾何学的な形状を持つことが分かる．

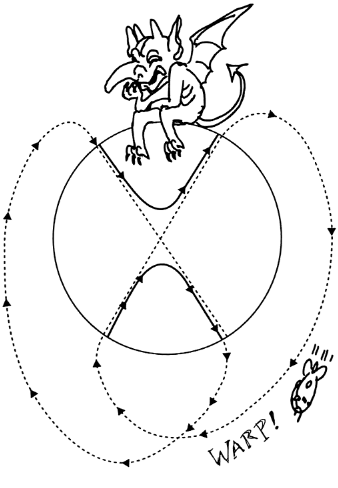


図 6.9　双曲線 = 円?

最後に，放物線について考えてみる．E_2 における放物線の標準形は

$$\eta=a\xi^2 \quad (a\in\mathbb{R}, a\neq 0)$$

であった．これを斉次座標で書き直すと，

$$\frac{y}{z}=a\frac{x^2}{z^2}, \quad \therefore \quad yz=ax^2$$

である．無限遠点では $z=0$ なので，結局 $ax^2=0$ が無限遠点における方程式であり，放物線と無限遠直線の交点は 1 点で，その斉次座標は $[0:1:0]$ である．注意すべきことは，無限遠点との交点の方程式は $x^2=0$ であり，$x=0$ が重根になっている点である．これについては，後ほど詳しく述べるが，実は放物線は無限遠直線に“接している”のである．また，放物線の無限遠に発散する 2 つの方向は無限遠点でつながって，射影平面上ではやはり円周と同じ形状になっている (図 6.10).

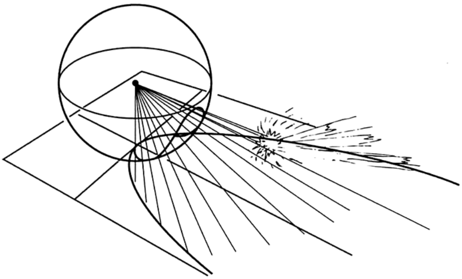


図 6.10　放物線と無限遠直線

6.4　射影変換

前節でみたように，無限遠直線も，通常の直線も，射影平面においてはどちらも射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ に同型である．したがって，幾何学の立場からするとこのような直線を互いに入れ替えるような変換があるべきである．実際，我々は有限の立場から無限遠点を見ようとしたときに，無限遠点を通常の平面上に地平線上の点として射影して考えたことを思い出してほしい．

また，前節でもうすうす感づいていたように，このような変換が，双曲線や楕円，そして放物線を互いに写しあってくれると大変都合がよい．

まず，点射影による有理写像を射影平面上でみるとどうなるかを考えてみよう．§6.2 の記号をそのまま使うことにして，3 次元空間内に，平面 H_1, H_3 を次のように用意する (H_2 は当面必要がないので省略する).

$$H_1=\{(1,\eta,\zeta)\mid \eta,\zeta\in\mathbb{R}\}\leftrightarrow x=1,$$

$$H_3 = \{(\xi,\eta,1) \mid \xi,\eta \in \mathbb{R}\} \leftrightarrow z = 1.$$

§6.2 では光源を原点に置いて，$\pi_{31} : H_3 \dashrightarrow H_1$ を考えた．このとき，有限点同士の有理写像として

$$\pi_{31}(\xi,\eta) = (\eta/\xi, 1/\xi) \quad (\xi \neq 0)$$

と表されたのであった．これを斉次座標で書いてみよう．そこで $\xi = x/z$, $\eta = y/z$ と置いて上の式に代入してみると

$$\pi_{31}(x/z, y/z) = (y/x, z/x) \quad (x, z \neq 0)$$

である．一方 $(x/z, y/z, 1) \sim (x,y,z)$ および $(y/x, z/x, 1) \sim (y,z,x)$ だから斉次座標では

$$\pi_{31}([x:y:z]) = ([y:z:x])$$

となる．これは単に座標の入れ替えに過ぎず，射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ 上では $x, z \neq 0$ という制限なしに任意の点に対して上の式は定義できる．この変換によって無限遠直線を写すと

$$\pi_{31}([x:y:0]) = [y:0:x]$$

となって，たしかにこれは通常の直線である．

もっと一般に，空間内に任意に配置された平面 H をとり，原点に点光源を置いたときの H から H_3 への点射影 π_H を考えてみよう．H は点 $w = {}^t(p,q,r)$ を通り，ベクトル $u = {}^t(a_1,b_1,c_1)$ および $v = {}^t(a_2,b_2,c_2)$ によって張られた平面とする．H 上の直交座標を考えたいので，u, v は互いに直交する単位ベクトルとしておく．このとき H 上の直交座標 (ξ,η) を

$$w + \xi u + \eta v \in H \tag{6.5}$$

で定める．そこで，式 (6.5) で表された点と原点を結ぶ直線を ℓ とし，ℓ と H_3 との交点を求めると，

$$\left(\frac{\xi a_1 + \eta a_2 + p}{\xi c_1 + \eta c_2 + r}, \frac{\xi b_1 + \eta b_2 + q}{\xi c_1 + \eta c_2 + r}, 1\right)$$

となる．したがって，

$$\pi_H(\xi,\eta) = \left(\frac{\xi a_1 + \eta a_2 + p}{\xi c_1 + \eta c_2 + r}, \frac{\xi b_1 + \eta b_2 + q}{\xi c_1 + \eta c_2 + r}\right)$$

と計算できるが，これを斉次座標で書いてみる．例えば

$$\frac{\xi a_1+\eta a_2+p}{\xi c_1+\eta c_2+r}=\frac{\dfrac{x}{z}a_1+\dfrac{y}{z}a_2+p}{\dfrac{x}{z}c_1+\dfrac{y}{z}c_2+r}=\frac{a_1x+a_2y+pz}{c_1x+c_2y+rz}$$

などとなるので，

$$\pi_H([x:y:z])=[x':y':z'],$$
$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1x+a_2y+pz\\b_1x+b_2y+qz\\c_1x+c_2y+rz\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&p\\b_1&b_2&q\\c_1&c_2&r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \tag{6.6}$$

が斉次座標による表示である．つまり斉次座標で表示すれば，点射影は単なる線型写像に他ならない．このとき u, v は互いに直交する単位ベクトルにとったので，式 (6.6) における係数 $a_1, b_1, \ldots$ は任意ではないが，このような点射影を何回か繰り返すことによって任意の線型写像を生成できる．

定義 6.4　3 次実正則行列 A に対して射影平面の変換 $\pi_A:\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\to\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ を

$$\pi_A([v])=[Av],\quad v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

によって定義する．π_A を**射影変換**と呼ぶ．また，射影変換が生成する群を**射影変換群**と呼び，$\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ で表す[5)]．

射影変換によって不変な幾何学的性質を研究するのが射影幾何学である．

演習 6.5　$A=\mathrm{diag}(k,k,k)$ $(k\neq 0)$ がスカラー行列であるとすると，π_A は $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ の恒等変換を引き起こす．したがって π_A が誘導する全射準同型 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})\to\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ は同型写像ではないことを示せ．

定理 6.6　射影平面上の 2 本の直線は射影変換によって互いに写りあう．

証明　無限遠直線 $\{[x:y:0]\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ が任意の直線に写ることを確認すれば十分である．行列 A の第 i 列を $a_i\in\mathbb{R}^3$ と表し，$A=(a_1,a_2,a_3)$ のように書く[6)]．すると

5) もちろん，$\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ の添え字 3 は，射影変換を引き起こす行列が 3 次の正則行列であることを表している．射影平面の幾何学的な次元は 2 であるから，次数が 1 ずれていることに注意．

6) ここで a_1, a_2, a_3 はベクトル a の第 1, 2, 3 成分を表しているのではない．あくまでも a_1 自身が $\mathbb{R}^3$ の 1 つのベクトルである．また，3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトルを v と表したりすることもあるが，単に v でベクトルを表すこともある．

$$\pi_A([x:y:0]) = \left[A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\right] = [xa_1 + ya_2]$$

である．したがって，これは点 $[a_1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ と $[a_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ を結ぶ直線である (定理 6.2 参照)．一方，任意の直線 ℓ に対して，直線上の相異なる 2 点 $[a_1], [a_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ を選ぶと，この 2 つのベクトルを第 1, 2 列に持つ正則行列 A が存在する．証明の前半の議論によって，この行列 A を用いて無限遠直線を π_A で写せば ℓ に一致する． ∎

さて，射影平面においても，2 次式で定義された曲線を 2 次曲線と呼ぶ．ただし，定義多項式としては，斉次座標で表したとき 2 次の斉次式になるようなもののみを考える．この 2 次式を 3 次の実対称行列 $Q = (q_{ij})_{1 \le i,j \le 3}$ を用いて，

$$f(v) = {}^t v Q v, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

と書いておく．このとき，定数 $k \in \mathbb{R}$ に対して $f(kx, ky, kz) = k^2 f(x, y, z)$ であるから，$f(x, y, z) = 0$ であれば $f(kx, ky, kz) = 0$ が成り立つ．これは 2 次曲線の定義方程式が斉次座標の取り方に依らず決まることを示している[7]．既にアフィン幾何の章で説明したように，対称行列 Q を定数倍しても (あるいは 2 次式の各係数を定数倍しても) 2 次曲線自身は変わらないことに注意しよう．これは対称行列の空間の射影化 $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R}))$ を考えることに対応しているが，詳しい考察はあとで行う．

2 次曲線 $f(v) = {}^t v Q v$ は $\det Q \neq 0$ のとき**非退化**，それ以外のとき**退化**していると言う．

演習 6.7 2 次式を実対称行列 $Q = (q_{ij})_{1 \le i,j \le 3}$ を用いて (6.7) 式のように決めたとき，これを斉次座標 x, y, z の 2 次式の形に具体的に表せ．

演習 6.8 2 次曲線 $f(x, y, z) = 0$ を考える．$f(x, y, z)$ が 1 次式の積に因数分解されるとき，2 次曲線は 2 本の直線の和集合であるが，このとき 2 次曲線は退化していることを示せ．

さて，射影変換 $A \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ は射影平面に $A \cdot [v] = [Av]$ $([v] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$ と働くので，2 次曲線 $f(v) = 0$ をどのように変換するかを調べてみると，

---

[7] 定義多項式を斉次式にしたのはこのような理由からである．

$$f(A^{-1}v) = {}^t(A^{-1}v)\,Q\,(A^{-1}v) = {}^tv({}^tA^{-1}QA^{-1})v \tag{6.8}$$

となる．つまり $\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R}) \ni Q \mapsto {}^tA^{-1}QA^{-1} \in \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$ がその作用である (しかし，上で注意したように，Q は定数倍を除いて考える必要がある)．

定理 6.9　実射影平面上の (空でない) 非退化 2 次曲線は射影変換によって単位円に写すことができる．

証明　非退化 2 次曲線の定義方程式を $f(v) = {}^tvQv = 0$ と置く．ここで $v = {}^t(x,y,z)$ は斉次座標を表す．これを射影変換 A^{-1} で写すと，定理の直前に説明したように，係数行列 Q は ${}^tAQA$ と変換される．線型代数学において次の定理が知られている．

補題 6.10　実対称行列 Q に対して，$\det Q \neq 0$ ならば，ある実正則行列 A が存在して

$$ {}^tAQA = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \quad (\varepsilon_i = \pm 1,\ i = 1,2,3)$$

とできる．また，うまく A を取りなおせば，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ の順序は任意に並べ変えることができる．

この補題の証明については，例えば [31], [41], [40] などを参照してほしい．しかし，実対称行列が直交行列によって対角化できることはよく知られており，それを用いれば補題の証明は簡単である．まず直交行列によって Q を対角化しておき，それをさらに実対角行列によって変換することで，対角成分を正規化できる．

定理の証明に戻ろう．補題によって，非退化 2 次曲線は次の標準形を持つことが分かる．

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \tag{ア}$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \tag{イ}$$

$$x^2 - y^2 - z^2 = 0, \tag{ウ}$$

$$-x^2 - y^2 - z^2 = 0. \tag{エ}$$

ここで (ア), (エ) のときは $x = y = z = 0$ であるから，2 次曲線は空になってしまう．また (イ) と (ウ) は適当に移項して変数を入れ替えれば $x^2 + y^2 = z^2$ に帰着する．変数を入れ替えるのも射影変換であったことに注意すると，結局，

空でない非退化 2 次曲線は，単位円 $x^2+y^2=z^2$ に変換できることが分かる．■

この定理によって，射影幾何学における非退化 2 次曲線は本質的に 1 つしかないことが分かった．つまり射影変換によって不変な性質を考えるときには一般の非退化 2 次曲線の代わりに単位円を考えればよいのである．

次にあげる問題を解くのはそれほど簡単ではない[8]．しかし，2 次曲線をいつも単位円としてよいというわけではないという警鐘になるであろう．

演習 6.11 射影平面上の 2 つの相異なる非退化 2 次曲線が与えられたとき，射影変換によって最も簡単な位置関係に写したい．どのような位置関係に写すことができるであろうか?

[8] どころかかなり難しい．

第 III 部

商空間の幾何

第7章　軌道空間と商位相

この節と次の節では一般の群 G の空間 X への作用を少し抽象的に考えよう．群 G は X の点を別の点に写すが，群の各元は逆元を持っているので，$g \in G$ で写った点は逆元 g^{-1} によって元の点に戻すことができる．群 G の作用でそのようにして写りあう点は幾何学的に似たような性質を持っていると期待される．そこで空間 X のある点と G の作用で写りあうような点全体を考えると便利である．このような集合を G の軌道と呼ぶ．この章では群の軌道と軌道空間 (商空間) X/G について解説しよう．

7.1　群の作用と軌道

群 G が空間 X に作用しているとする．いまのところ，群 G にも空間 X にも何の制約も課さない．さて，群の作用を定義するときに用いた写像 $\alpha : G \times X \to X$ を思い出そう (定義 3.10 参照)．このとき $g \in G$ が引き起こす X の自己同型が

$$\varphi(g) : X \to X, \quad \varphi(g)(x) = \alpha(g, x) \quad (x \in X)$$

のように決まるのであった．

例 7.1　$G = \mathbb{R}$ を加法によって群とみなそう．つまり群の演算は通常の実数の和であって，逆元は $t \in \mathbb{R}$ に対して $-t$ であるから，図形的には数直線上の原点に関する折り返しである．このとき G の $X = \mathbb{R}^2$ への作用

$$\varphi(t)(x, y) = (e^t x, e^{-t} y), \quad t \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

を考えてみよう．容易に計算できるように

$$\begin{aligned}\varphi(t)\varphi(s)(x, y) &= \varphi(t)(e^s x, e^{-s} y) = (e^t e^s x, e^{-t} e^{-s} y) \\ &= (e^{t+s} x, e^{-t-s} y) = \varphi(t+s)(x, y)\end{aligned}$$

だから $\varphi(t)\varphi(s)=\varphi(t+s)$ が成り立ち，確かにこれは群の作用である．この作用を写像 α を用いて表すと

$$\alpha: G\times X=\mathbb{R}^3\to X=\mathbb{R}^2, \quad \alpha(t,x,y)=(e^t x, e^{-t} y),$$

となっている．このように書くと t をパラメータのように思うことができるだろう．

さて，平面上の 1 つの点 $(x,y)\in X$ を固定してパラメータ $t\in G$ を動かすと，1 つの曲線が平面上に描かれる．この曲線は例えば，最初の点が $(x,y)=(1,1)$ であれば，双曲線 $xy=1$ の第 1 象限の部分になる．しかし，例えば $(x,y)=(1,0)$ ならば x 軸の正の部分のみを動く．はなはだしい場合，$(x,y)=(0,0)$ が原点なら，いくら $t\in G$ を動かしても $\varphi(t)(0,0)=(0,0)$ であって原点は変化せず 1 点のみを表している．このようにして，X のどの点から始めるかによって曲線の形状は大きく異なるが，$G=\mathbb{R}$ の作用によって平面上に曲線 (ほとんどすべては双曲線の 2 本の分枝のうち 1 つ) を描くことが分かる．

この例のように G の X 上の作用が与えられたとき，X の部分集合

$$\{\varphi(g)x \mid g\in G\}=\{\alpha(g,x) \mid g\in G\}$$

は $g\in G$ が動くとき X 上に描かれる軌跡であると思うことができる．そこでこれを $x\in X$ を通る G の**軌道**と呼び $\mathbb{O}_x$ と表す．つまり

$$\mathbb{O}_x=\{\varphi(g)x \mid g\in G\}$$

である．軌道を $\varphi(G)x$ と書いたり，作用の記号 φ を省略して $G\cdot x$ と書いたりすることもある．また，群 G による軌道であることを強調するために $\mathbb{O}_x^G$ と書くこともある．

X 上の軌道の全体を**軌道空間**と呼び，これを

$$\Omega_G(X)=\{\mathbb{O}_x \mid x\in X\}$$

と表すことにしよう．次の補題が成り立つ．

補題 7.2　群 G が集合 X に作用しているとし，$\Omega_G(X)$ をその軌道の全体とする．

(1) 2 つの軌道 $\mathbb{O}_x$ と $\mathbb{O}_y$ に対して，両者は等しいか，あるいは共通部分を持たない．つまり $\mathbb{O}_x=\mathbb{O}_y$ または $\mathbb{O}_x\cap\mathbb{O}_y=\varnothing$ のいずれかが成り立つ．このとき，$\mathbb{O}_x=\mathbb{O}_y$ であることと $y\in\mathbb{O}_x$ となることは同値である．

(2) 軌道の全体は X の互いに共通部分を持たない部分集合への分割を与える．つまり $X=\bigsqcup_{\mathbb{O}_x\in\Omega_G(X)}\mathbb{O}_x$ が成り立つ[1]．これを X の G の作用による**軌道分解**と呼ぶ．

証明　(1) $\mathbb{O}_x\cap\mathbb{O}_y\neq\varnothing$ としよう．このとき，まず $y\in\mathbb{O}_x$ を示し，それから $\mathbb{O}_x=\mathbb{O}_y$ が従うことを証明しよう．$z\in\mathbb{O}_x\cap\mathbb{O}_y$ を取ると，軌道の定義により $z=g\cdot x=h\cdot y$ となるような $g,h\in G$ が存在している．したがって $y=h^{-1}g\cdot x\in\mathbb{O}_x$ である．

ここで $y\in\mathbb{O}_x$ とすると，ある $k\in G$ によって $y=k\cdot x$ と表されている．すると任意の $g\in G$ に対して $g\cdot y=gk\cdot x\in\mathbb{O}_x$ が成り立つから $\mathbb{O}_y\subset\mathbb{O}_x$ である．ところが $x=k^{-1}\cdot y\in\mathbb{O}_y$ であるから，全く同様にして $\mathbb{O}_x\subset\mathbb{O}_y$ も結論される．したがって $\mathbb{O}_x=\mathbb{O}_y$ である．

(2) 軌道たちが互いに共通部分を持たないことは既に証明した．ところが任意の $x\in X$ に対して $x\in\mathbb{O}_x$ であるから $X\subset\bigsqcup_{\mathbb{O}_x\in\Omega_G(X)}\mathbb{O}_x$ である．一方，右辺は X の部分集合の和であるから X に含まれており，両者は一致する．■

軌道 $\mathbb{O}_x$ に対して，x を軌道の**代表元**と呼ぶ．ただし，上の補題で明らかになったように別の元 y に対して $\mathbb{O}_x=\mathbb{O}_y$ となっていることもあるから，代表元は軌道に対して一意的には決まらない．実際，任意の元 $y\in\mathbb{O}_x$ は軌道 $\mathbb{O}_x$ の代表元である．

軌道空間の例をさらにいくつかあげておこう．

例 7.3　3 次の直交群 $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ が空間 $\mathbb{R}^3$ に左からの行列の積で作用しているとする．

$$G=\mathrm{O}_3(\mathbb{R})\curvearrowright\mathbb{R}^3=X.$$

直交群の元 $g\in\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ は X の距離を変えない等長変換である．実際，任意の 2 点 $a,b\in X$ をとると，

$$\begin{aligned}\|ga-gb\|^2&={}^t(ga-gb)(ga-gb)={}^t\{g(a-b)\}g(a-b)\\&={}^t(a-b)\,{}^tgg(a-b)={}^t(a-b)(a-b)\\&=\|a-b\|^2\end{aligned}$$

---

[1] ここで記号 $\bigsqcup_{i\in I}U_i$ は $U_{i_1},U_{i_2},\ldots$ たちの和集合を表すが，同時に $i\neq j$ ならば $U_i\cap U_j=\varnothing$ であることも表している．このような互いに共通部分を持たない集合の和集合を**直和**と呼ぶのであった．

となり ga と gb の間の距離 $\|ga-gb\|$ は a と b の間の距離に等しいことが分かる．ここで，ベクトルのノルムに対して $\|v\|^2={}^t vv$ であること，および $g\in O_3(\mathbb{R})$ なので ${}^t gg=1_3$ が成り立つことを用いた[2)]．このことから特に，原点からの距離は g で動かすことによって変化しない．

また変換 g はベクトルの間の角度も変えない．実際，内積を考えると

$$(ga)\cdot(gb)={}^t(ga)gb={}^t a\,{}^t ggb={}^t ab=a\cdot b$$

だから，変換 g によって内積 $a\cdot b$ は不変である．特に $a\perp b$ ならば $ga\perp gb$ が成り立つ．つまり直交するベクトルを g で写すとやはり直交している．

さて，直交変換 $g\in O_3(\mathbb{R})$ はある軸を中心とする回転であるか，あるいはある平面に関する鏡映と回転の合成になることを示そう．行列 A の行列式を $\det A$ で表すと，直交行列 g に対しては $\det g=\pm 1$ であることに注意する．実際 ${}^t gg=1_3$ の両辺の行列式を取って

$$1=\det({}^t gg)=\det{}^t g\cdot\det g=(\det g)^2$$

が成り立つ．

そこで，まず $\det g=1$ のときを考えよう．行列式が 1 であるような直交行列の全体を $SO_3(\mathbb{R})$ と書いて，3 次の**特殊直交群**と呼ぶ．このとき $g\in SO_3(\mathbb{R})$ は原点を通るある直線を軸とする回転行列であることを示そう．

$$\begin{aligned}\det(g-1_3)&=\det(g-g\,{}^t g)\quad(\because\ g\,{}^t g=1_3)\\&=\det g(1_3-{}^t g)=\det g\cdot\det(1_3-{}^t g)\\&=\det(1_3-g)\quad(\because\ \det g=1,\ \det{}^t A=\det A)\\&=-\det(g-1_3)\quad(\because\ \det(-A)=\det(-1_3)\det A=-\det A)\end{aligned}$$

であるから $\det(g-1_3)=0$ である．したがって $g-1_3$ は正則ではないので，$(g-1_3)v=0$ となるベクトル $v\in\mathbb{R}^3$, $v\neq 0$ が存在する．これより $gv=v$ が成り立ち，g は原点を通る方向 v の直線 ℓ_v 上の点をすべて動かさないことが分かる．これが回転軸である．ベクトル v は方向だけが重要なので以下単位ベクトルと仮定する．

一方 g は直交変換なので内積を変えないから，v と直交するベクトル u に

---

2) ついでに内積に関して $u\cdot v={}^t uv$ であることにも注意しておこう．

対して，$v = gv$ と gu はまた直交する．つまり g は ℓ_v に垂直な原点を通る平面 H を保存する．そこで H において直交するベクトル p, q を取ってベクトル $\{v,p,q\}$ がこの順序で右手系の正規直交基底になるようにしよう[3]．すると gp, gq はまた H 内の互いに直交するベクトルになっている．このとき $\det g = 1$ なので $\{v,p,q\}$ が右手系であれば，$\{v = gv, gp, gq\}$ もまた右手系になっていなければならない．したがって，ベクトル p と gp がなす角度を θ とすれば，結局 g は平面 H 内の角度 θ の回転を表す (図 7.1).

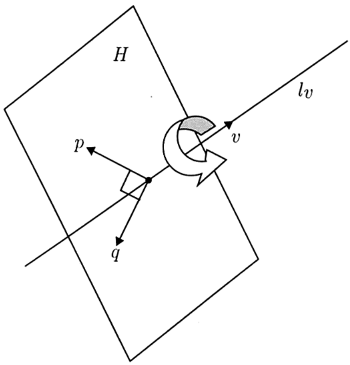


図 7.1　回転行列

次に $\det g = -1$ の場合を考えよう．このとき対角行列 $h = \mathrm{diag}(1,1,-1)$ を考えると，$h\,{}^t(x,y,z) = {}^t(x,y,-z)$ となり z 座標のみ符号が反転するので，これはちょうど xy 平面に関する鏡映である．このとき $\det(hg) = \det h \det g = 1$ だから $r = hg$ は回転を表す．一方 $h^{-1} = h$ なので $g = h^{-1}r = hr$ は鏡映と回転の合成である．

以上で，直交群 $G = \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ は回転と鏡映によって生成されることが示された．しかも $h = \mathrm{diag}(1,1,-1)$ と置くと

$$\mathrm{O}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \sqcup h \cdot \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$$

であることも同時に分かった．

さて直交群 G の $X = \mathbb{R}^3$ への作用による軌道を考えてみよう．そこで $x \in X$

[3] つまり v, p, q の順番でちょうど x, y, z 軸の正の方向を向いているとする．

を空間内の任意のベクトルとして，軌道 $\mathbb{O}_x$ を求める．軌道 $\mathbb{O}_x$ は x を G の元によって動かした点すべて，つまり G の作用によって動きうる点のすべてを意味している．

上で見たように，原点から x までの距離 $r = \|x\|$ は G によって不変であるから，x を G の作用によってどのように動かしても半径 r の球面内しか動き回ることはできない．したがって，原点を中心とする半径 r の球面を S_r で表すと，$\mathbb{O}_x \subset S_r$ $(r = \|x\|)$ が分かる．一方，原点を通る直線を軸とする任意の回転は G の元だから，x を球面内で任意の方向に回転することができる．このように x を適当に回転することによって球面内の任意の点に写すことができる．

以上の議論より，$r = \|x\|$ と置くと x を通る G の軌道は

$$\mathbb{O}_x = \{y \in X \mid \|y\| = r\} = S_r$$

で与えられることが分かった．ただし，これには例外があって $x = 0$ が原点を表すときは $\mathbb{O}_0 = \{0\}$ と軌道は 1 点のみになる．全空間 X は半径 $r > 0$ の球面 S_r と原点の和集合として表されることに注意しよう．つまり

$$X = \bigsqcup_{r>0} S_r \sqcup \{0\}$$

であるが，これが空間 X の軌道分解を与えている．このとき，球面 S_r 上の点はすべて，どの点でも軌道の代表元になり得る．実際，球面上のどの点も特別な点ではなく，すべて平等であることに注意してほしい．

例 7.4　群 $G = \mathbb{Z}$ を整数のなす加法群とする．$X = \mathbb{R}$ を実数とすると加法群 G は X に通常の加法で作用する．つまり

$$\varphi(k)x = x + k \quad (x \in X,\ k \in G).$$

このとき G の軌道は $x \in X$ に対して

$$\mathbb{O}_x = \{\varphi(k)x \mid k \in G\} = \{x + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

となる．この集合は x を起点として整数だけずれた点の全体である．x を整数だけずらしていくと 0 以上 1 未満の数に帰着させることができる．したがって軌道 $\mathbb{O}_x$ の代表元を区間 $[0,1)$ から取ることができる．つまり

$$\Omega_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}) = \{\mathbb{O}_x \mid 0 \leq x < 1\}$$

である．

同様にして加法群の作用 $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$ をやはり加法で定義すると

$$\Omega_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2) = \{\mathbb{O}_{(x,y)} \mid 0 \leq x, y < 1\}$$

となることが分かる．これは平面 $\mathbb{R}^2$ 内に図示すると，端の点が少し欠けた正方形状の領域である．

例 7.5　2 次の一般線型群 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の正方行列の空間 $X = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ への 2 通りの作用とその軌道を以下考えてみよう．

最初の作用は左からの行列の積である．つまり $g \in G$ と $A \in X$ に対して，

$$\varphi(g)A = g \cdot A \quad (\text{行列の積})$$

と定める．これが群の作用であることは簡単に確かめられるであろう．ではこの作用による軌道はどうなるだろうか?

線型代数学を学んだことのある方は**基本変形**というものをご存知であろう．基本変形には行の変形と列の変形があるが，ここでは行基本変形が大切である．2 次の正方行列に限らないで少し復習しておくと，それは行列 A の次のような変形を指すのであった．

(R1) A の第 i 行を $\lambda \neq 0$ 倍する．

(R2) A の第 i 行と第 j 行を入れ替える $(i \neq j)$．

(R3) A の第 i 行を μ 倍して第 j 行に加える $(i \neq j)$．このとき第 i 行そのものは変化しない．

これらの変形は左からある正則行列を掛けることによって実現できる．それを 2 次の行列に対して例示しておくと，順に

$$\text{(R1)} \quad \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda' c & \lambda' d \end{pmatrix} \quad (\lambda, \lambda' \neq 0),$$

$$\text{(R2)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix},$$

$$\text{(R3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \mu c & b + \mu d \\ c & d \end{pmatrix}$$

のようになる．一般の場合にも同様の行列を考えれば，基本変形 (R1)–(R3) が左から特別な形の正則行列を掛けることによって実現できることは明らかであろう．このような特別な形の行列を**基本行列**と呼ぶ．

さて，基本変形によって任意の行列は階段形の行列に変形できるのであった．

2 次の正方行列 A の場合には，次の 4 種類の行列に変形できる．

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&b\\0&0\end{pmatrix}\ (b\in\mathbb{C}),\ \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

このような行列を**簡約行列**と呼ぶ．実際に行列を変形してこのような形にできることを納得するのはそれほど難しくない．

もし変形する行列 A が正則なら，このリストのうち最初に現れている単位行列に変形できる．つまりいくつかの基本行列を A に掛ければ単位行列に変形できることになる．その基本行列を R_i $(i=1,2,\ldots)$ と書くと

$$R_k\cdots R_2R_1A=1_2,\quad \therefore\quad A=R_1^{-1}R_2^{-1}\cdots R_k^{-1}$$

となる．ところが基本行列の逆行列はまた基本行列の形をしているので結局 A は基本行列の積である．これを一般にすると次の補題を得る．

補題 7.6　任意の正則行列は基本行列の有限個の積で表すことができる．

この補題によって，正則行列を左からある行列に掛けることは，何回か行基本変形を行うことに他ならないことが分かる．したがって $G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の $X=\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ への左からの掛け算による作用は 2 次の正方行列を行基本変形してゆくことに他ならず，式 (7.1) のいずれかの行列に変形できることになる．つまり群 G の作用による軌道の代表元の形が簡約行列である．

この場合，行列 $\begin{pmatrix}1&b\\0&0\end{pmatrix}$ に対応する軌道がちょうどパラメータ $b\in\mathbb{C}$ の個数だけあることに注意してほしい．したがって，軌道空間は

$$\Omega_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})}(\mathrm{M}_2(\mathbb{C}))\simeq(3\text{ 点})\sqcup\mathbb{C}$$

とみなすことができる．

次に $G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の**共役作用**を考えよう．つまり $g\in G$ と $A\in X=\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ に対して，作用を

$$\varphi(g)A=gAg^{-1}$$

で定める．ある行列を共役作用で動かすと次の 2 種類の行列になることが線型代数によって知られている．

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}\ (a,d\in\mathbb{C}),\quad \begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}\ (a\in\mathbb{C}).$$

最初の場合は A が対角化可能，二番目の場合は対角化不可能の場合にあたって

いる．ただし対角行列の場合 $\mathrm{diag}(a,d)$ と $\mathrm{diag}(d,a)$ は同じ軌道に属している．したがってこの場合，軌道空間は

$$\Omega_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})}(\mathrm{M}_2(\mathbb{C})) \simeq \{(a,d) \in \mathbb{C}^2\} \sqcup \mathbb{C}$$

となっている．ただし右辺の第一項において $(a,d) \in \mathbb{C}^2$ は

$$\begin{cases} \qquad \mathrm{Re}\, a > \mathrm{Re}\, d & \text{または} \\ \mathrm{Re}\, a = \mathrm{Re}\, d,\ \mathrm{Im}\, a \geq \mathrm{Im}\, d \end{cases}$$

を満たしているとする．

この 2 つの例を見れば分かるように，たとえ群 G とその作用する空間 X が同じでも軌道空間は全く異なることがあり得る．

7.2　軌道空間と不変式

G の軌道と不変式の間には密接な関係がある．それを説明する前に，まず不変式の定義を少しだけ一般化しておこう．そこで G が X 上に作用しているとして，X 上の任意の関数 f を考える．その全体を $\mathrm{Fun}(X)$ と書く．もちろん $\mathrm{Fun}(X)$ はベクトル空間だが，その次元は少なくとも X に含まれる点の個数だけはある巨大なものである．関数 $f \in \mathrm{Fun}(X)$ が G の作用 φ によって**不変**であるとは，

$$f(\varphi(g)x) = f(x) \quad (g \in G,\ x \in X) \tag{7.2}$$

が成り立つときに言う．関数 f が多項式のときには**不変式**，関数のときには**不変関数**などと呼んだりもする．

関数空間 $\mathrm{Fun}(X)$ には G が

$$(\rho(g)f)(x) = f(\varphi(g^{-1})x) \quad (g \in G,\ x \in X)$$

のように作用しており，これによって $\mathrm{Fun}(X)$ は G の表現空間になる．これを G の X 上の**正則表現**と呼んでいる[4)]．このように正則表現 ρ を定義しておくと，$f \in \mathrm{Fun}(X)$ が不変であるとは，任意の $g \in G$ に対して $\rho(g)f = f$ が成り立つこと，つまり f が G の作用 ρ による不動点になっていることと同じであ

[4)] 通常は関数空間を無制限に取らないで，多項式関数の全体とか，解析関数，あるいは自乗可積分関数のなす空間などを想定して正則表現と呼ぶ．

る．そこで不変関数の全体を $\mathrm{Fun}(X)^G$ と書く．

さて，不変関数と軌道の関係は次の簡単な命題から分かる．

命題 7.7 X 上の関数 f が G の作用に関して不変であるための必要十分条件は，f が任意の軌道 $\mathbb{O}_x$ 上で定数値を取ることである．

証明 関数 f が不変であるとする．点 $x \in X$ を通る軌道 $\mathbb{O}_x$ を取ると，軌道に属する点は $\varphi(g)x \ (g \in G)$ という形をしている．式 (7.2) より

$$f(\varphi(g)x) = f(x)$$

が成り立つが，これは f の $\varphi(g)x$ での値が x における値と等しいことを意味しており，軌道 $\mathbb{O}_x$ 上のすべての点でこの値は等しい．

逆に軌道上で同じ値を取れば，式 (7.2) を満たすから f は不変である．■

この命題をもう少し一般化すると次の定理に到達する．

定理 7.8 群 G が空間 X に作用しているとする．このとき，不変関数の全体 $\mathrm{Fun}(X)^G$ から軌道空間上の関数の全体 $\mathrm{Fun}(\Omega_G(X))$ への自然な写像

$$\nu : \mathrm{Fun}(X)^G \to \mathrm{Fun}(\Omega_G(X))$$

が不変関数 $f \in \mathrm{Fun}(X)^G$ に対して

$$\nu(f)(\mathbb{O}_x) = f(x) \quad (x \in X)$$

と定義することによって得られる．このとき ν は線型同型である．

証明 まず写像 μ が矛盾なく定義されていることを示す．それには $\mathbb{O}_x = \mathbb{O}_y$ なら $f(x) = f(y)$ となることを言えばよいが，f は不変関数であるから前命題より軌道上で一定値を取る．ところが補題 7.2 より $\mathbb{O}_x = \mathbb{O}_y$ であることと x, y が同じ軌道に属することは同値であるから $f(x) = f(y)$ である．

写像 μ が線型であることは明らかであるから，あとは全単射であることを示せばよい．それには，逆写像を構成するのが手っ取り早い方法である．そこで写像 $\mu : \mathrm{Fun}(\Omega_G(X)) \to \mathrm{Fun}(X)^G$ を，関数 $F \in \mathrm{Fun}(\Omega_G(X))$ に対して，$\mu(F)(x) = F(\mathbb{O}_x)$ によって定義しよう．μ が ν の逆写像になることは簡単な演習問題である．■

この定理によると，X 上の不変関数とは軌道空間 $\Omega_G(X)$ 上の関数に他ならないことが分かる．この認識は重要ではあるが，X が何らかの構造，例えば位

相とか微分構造を持ち，あるいは測度空間であって，X 上の関数空間をそれに即したものに取っているときは 2 つの概念の間には齟齬（そご）が生じる．それについて詳しくは次の節で述べることにして，少し例を観察しよう．

例 7.9　G を有限群とし，X を G 自身にして，共役による作用

$$\varphi(g)x = gxg^{-1} \quad (g, x \in G)$$

を考える．このとき $x \in G$ を通る軌道

$$\mathbb{O}_x = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$$

を x の**共役類**と呼び，しばしば $C_G(x)$ で表す．共役類上で一定値を取る関数は**類関数**と呼ばれるが，この場合には，類関数が我々の不変関数に一致している．つまり $\mathrm{Fun}(G)^G = $ (類関数全体) である．

例 7.10　G を群とし，H をその部分群とする．このとき H は G に左からの積で作用している．つまり $h \in H$ および $g \in G$ に対して，$\varphi(h)g = hg$ と置くのである[5]．これを**左移動**と呼ぶ．このとき，$a \in G$ を通る H の軌道は

$$\mathbb{O}_a^H = \{ha \mid h \in H\}$$

となるが，これを単に Ha と書いて H による a の**左剰余類**と呼ぶ．また軌道空間 $\Omega_H(G)$ を $H\backslash G$ と書いて，左剰余類の空間と呼ぶ．補題 7.2 によって G は軌道，あるいは左剰余類の和に分解する．つまり

$$G = \bigsqcup_a Ha$$

であるが，これを G の**左剰余類分解**と呼ぶ．ただし和は左剰余類の空間 $H\backslash G$ の代表元 a を動く．

さて，左からの積の代わりに右からの積を用いて H の作用を定義することも可能である．それには $\varphi^R(h)g = gh^{-1}$ と決めればよい．ここで右からの積は逆元を取ってあることに注意しよう．というのも

$$\varphi^R(k)\varphi^R(h)g = \varphi^R(k)(gh^{-1}) = (gh^{-1})k^{-1} = g(kh)^{-1} = \varphi^R(kh)g$$

となって，作用の条件をちょうど満たすようにするためである．この作用を G の H による右移動と呼ぶ．この作用を用いて左移動のときと同様に右剰余類 aH や右剰余類分解 $G = \bigsqcup_a aH$ を定義することができる．また右剰余類の空

5) 上で使ってきた記号では G がここでの H に，X がここの G にあたっていることに注意しよう．

間を G/H と書く．

右移動に関する G 上の不変関数を右 H-不変といい，その全体を $\mathrm{Fun}(G)^H$ と書くが，左 H-不変な関数の全体を ${}^H\mathrm{Fun}(G)$ のように右不変なものと区別して書くことが多い．また ${}^H\mathrm{Fun}(G)^H$ は両側 H-不変な関数の全体を表している．

例 7.11 G を平面上の回転群

$$G = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

とする．R_θ は原点を中心とする角度が θ の回転を表している．G は自然に平面 $X = \mathbb{R}^2$ に回転として作用しているが，このとき $(x,y) \in X$ を通る軌道は (x,y) を通る原点中心の円周となる．ただし $(x,y) = (0,0)$ のときには，この円は退化して 1 点になっていることに注意しよう．したがって軌道としては半径が $r \geq 0$ の円周を取ることができ，

$$\mathbb{O}_{(x,y)} = \mathbb{O}_{(z,w)} \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = z^2 + w^2$$

である．軌道空間は $\Omega_G(X) = \{\mathbb{O}_{(r,0)} \mid r \geq 0\} \simeq \mathbb{R}_{\geq 0}$ と表されることが分かり，これは (端点を含む) 半直線である．全平面で定義された関数 $f(x,y)$ で回転不変なものは半直線上の関数 $F(r)$ と一対一に対応するというのが定理 7.8 の主張となる．

演習 7.12 例 7.11 において，平面上の回転不変でかつ微分可能な関数と $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の (片側) 微分可能な関数とは一対一に対応しているだろうか? 連続関数だとどうか．

7.3 商空間

前節では群の作用と軌道空間について考えた．このとき，G にも X にも特別な仮定をしなかったが，この節では，例えば X を位相空間としたときに軌道空間に適当な位相を考えるにはどうすればよいかという問題を考えてみよう．このように，例えば位相とか可微分多様体の構造などを論じるときに軌道空間のことを X の G による**商空間**と呼ぶことがある．軌道空間と呼ぶときには 1 つ 1 つの軌道を X の部分集合と見て，部分集合のいくつかの集まりとして考えるが，商空間と言ったときにはそれぞれの軌道を 1 つの “点” とみなして，そのような点の間の関係 (閉包関係とか，連続性・微分可能性などの関係) を考えてい

ることが多いようである．

7.3.1　位相空間

まず X が位相空間である，あるいは X 上に位相が定義されているとはどういうことであったかを復習しよう．X の位相とは，具体的には X 上の開集合系のことを指す．**開集合系**は X の部分集合からなる系 $\mathscr{O} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ であって，A は添字の集合[6] を表し，各 $\alpha \in A$ に対して開集合となるべき部分集合 $U_\alpha \subset X$ が指定されている．開集合系は次の 3 つの性質を満たさなければならない．これを**開集合系の公理**と呼ぶ．

(1) $\varnothing, X \in \mathscr{O}$,

(2) $U_\alpha, U_\beta \in \mathscr{O}$ ならば　$U_\alpha \cap U_\beta \in \mathscr{O}$,

(3) $U_\beta \in \mathscr{O}$ $(\beta \in B)$ ならば　$\bigcup_{\beta \in B} U_\beta \in \mathscr{O}$.

(1) は空集合と全体集合が開集合であるべしという要請である．(2) は開集合の共通部分がまた開集合であることを要請している．もちろん (2) を繰り返して使ってもよいから，実質的には有限個の開集合の共通部分がまた開集合になっているということである．最後に (3) は開集合の (有限個であれ，無限個であれ) どのような和集合もまた開集合であることを言う．

これらの性質は例えば実数あるいは n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ におけるごく普通の意味の開集合であれば明らかに満たしているものであるが，大切なことは，このような性質を満たしてさえいれば**どのような**開集合系を取ってもそれが X に位相を定義するという点である．集合 X に位相を定義する開集合系が与えられているとき，X を**位相空間**と呼ぶ．

例 7.13　集合 X に対して，開集合は $\varnothing$ と X 自身だけであると決めると，これは開集合系の性質を満たしている．この開集合系 $\{\varnothing, X\}$ から決まる位相を**自明な位相**または**密着位相**と呼ぶ．

一般に，X 上の 2 つの位相 τ_1, τ_2 が与えられたとし，位相 τ_i を定める開集合系を $\mathscr{O}(\tau_i)$ で表そう．このとき $\mathscr{O}(\tau_1) \subset \mathscr{O}(\tau_2)$ であれば，位相 τ_1 は τ_2 よりも**弱い**という．もちろん，このとき τ_2 は τ_1 よりも**強い**位相である．2 つの集

---

[6] 添字の集合が可算であれば例えば $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$ のように番号を振ることができるが，一般には (というよりほとんどの場合) 開集合の系は可算より大きな濃度の開集合を含んでおり，添字の集合もそれに合わせて一般的にならざるを得ない．

合 $\varnothing$ と X は定義によりどのような開集合系にも含まれていなければならないから，この言葉遣いによると，自明な位相は X に入りうる位相の中で最弱の位相である．

逆に最強の位相を考えることもできる．それには，すべての部分集合を開集合系として採用すればよい．このように決めると開集合系の性質を満たすことは明らかであろう．特に 1 点のみの集合 $\{x\} \subset X$ は開集合である．このような位相を**離散位相**と呼ぶ．

このようにして位相空間には開集合という概念が定まっているが，開集合の補集合を**閉集合**とよぶ．

演習 7.14 閉集合は次の性質を持つことを示せ (**閉集合系の公理**).

(1) $\varnothing, X$ は閉集合である．

(2) V_α, V_β が閉集合ならば $V_\alpha \cup V_\beta$ も閉集合である．

(3) 添字集合 B に対して $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ が閉集合の族であれば $\bigcap_{\beta\in B} V_\beta$ は閉集合である．

この演習の (3) の性質から，任意の部分集合 $A \subset X$ に対して，A を含む最小の閉集合が存在することが分かる．それは A を含むような閉集合全体の共通部分を取ればよい．この閉集合を A の**閉包**と呼び $\overline{A}$ で表す．

演習 7.15 $X = \mathbb{R}$ として，$\mathscr{O} = \{A \subset \mathbb{R} \mid \#(\mathbb{R} \setminus A) < \infty\} \cup \{\varnothing\}$ と置く．つまり A が空集合であるか，あるいは $\mathbb{R}$ から有限個の点を取り除いて得られる部分集合であるとき $A \in \mathscr{O}$ とする．

(1) $\mathscr{O}$ は開集合系の公理を満たすことを示せ．

(2) 閉集合はどのような形をしているだろうか．

(3) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ を整数全体の集合とするとき，この位相における閉包 $\overline{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{R}$ であることを示せ．

『位相』というのは連続性とか遠近，つながり具合といった概念を表す用語であるが，このような開集合系を定めるだけでなぜ位相空間といえるのだろうか? そこで，開集合をどのような場合に用いるのかという例をいくつかあげておく．以下，集合 X には開集合系が与えられており，位相空間であるとする．

定義 7.16 点 $x \in X$ に対して $x \in U$ となるような開集合 U を x の**近傍**と呼ぶ．また $\{U : 開集合 \mid x \in U\}$ を x の**近傍系**と呼ぶ．

まず位相空間における点列の収束を定義してみよう．

例 7.17 (**点列の収束**)　X の点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が点 $x \in X$ に**収束する**とは，x の任意の近傍 U に対してある自然数 N が存在して，$n \geq N$ ならば $z_n \in U$ となるときに言う．

これは実数列の収束と比較すると分かりやすいだろう．実数の点列 $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある実数 ξ に収束するとは，

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して，ある自然数 } N \text{ が存在して，} n \geq N \\ \text{ならば } |\xi - \zeta_n| < \varepsilon \text{ となる} \tag{7.3}$$

ことであった．これは ε-δ 論法と呼ばれているものの一部であるが，位相の言葉でこれを言い換えてみよう．

まず，実数 $\mathbb{R}$ の開集合はどのようなものであったかを思い出そう．ほぼ同じことであるので，ここでは $\mathbb{R}^n$ に対して述べる．

定義 7.18　$X = \mathbb{R}^n$ に対して，$A \subset X$ が開集合であるとは，任意の $a \in A$ に対して十分小さな正数 $\varepsilon > 0$ を取れば

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \varepsilon\} \subset A$$

が成り立つことである．平たく言えば，a を中心とする十分小さな小球が A に含まれるときに A を開集合と呼ぶのである．このような開集合系から決まる X の位相を**ユークリッドの位相**と呼ぶこともある．

上の定義をもっと直感的に言うと，「$A \subset \mathbb{R}^n$ が開集合であるのは境界の点を含まないときである」ということができるだろう[7]．実際，境界の点でその点を中心とする微小な球を考えると，それは A の点も含むし，A の外部の点も含む．したがってどのような半径の小球を取ってもそれが A にすっぽりと含まれることはない．

さて，もとの実数 $\mathbb{R}$ に話を戻そう．実数 ξ の近傍を

$$U_\varepsilon = \{\eta \in \mathbb{R} \mid |\xi - \eta| < \varepsilon\} = (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$$

で与えられる ξ を中心とする，半径が ε の開区間としてみよう．これは確かに ξ を含むような $\mathbb{R}$ の開集合である．この近傍を用いると，式 (7.3) は

---

[7] A の**境界**とは A^c を A の補集合とするとき $\overline{A} \cap \overline{A^c}$ を指す．ただし $\overline{A}$ は A の閉包である．A の境界を記号で ∂A と表す．また $A \setminus \partial A$ の点を A の内点と呼ぶ．

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 N が存在して，$n \geq N$
ならば $\zeta_n \in U_\varepsilon$ が成り立つ

と言い表すことができ，これは冒頭にあげた一般の位相空間における点列の収束の条件とほぼ同じである．

連続関数も開集合を用いて定義することができる．

定義 7.19 位相空間 X, Y が与えられたとき，写像 $f: X \to Y$ が**連続**であるとは，任意の開集合 $U \subset Y$ に対して，逆像 $f^{-1}(U) \subset X$ がまた開集合になるときに言う．ただし，U の f による**逆像**とは

$$f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$$

で定義される X の部分集合のことである．

このように連続性を定義すると，連続写像 f はごく普通の意味での連続性を満たすことが確かめられる．例えば次の定理が成り立つ．

定理 7.20 位相空間 X, Y の間の連続写像 $f: X \to Y$ を考える．X の点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $x \in X$ に収束しているならば，$\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は Y において $f(x)$ に収束する．

証明 収束の定義に従って $f(x) \in Y$ の任意の近傍 $U \subset Y$ を取ろう．写像 f は連続なので，逆像 $f^{-1}(U)$ は X の開集合である．もちろん $x \in f^{-1}(U)$ だから $f^{-1}(U)$ は x の近傍である．点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X において x に収束しているから，ある自然数 N が存在して，$n \geq N$ ならば $z_n \in f^{-1}(U)$ が成り立ち，これは $f(z_n) \in U$ を意味する． ∎

この定理によって $x = \lim_{n \to \infty} z_n$ ならば $f(x) = \lim_{n \to \infty} f(z_n)$ が成り立つ，ように思われる．それはある意味で正しいが，実はこのように簡単に書いてしまうわけにはいかない．というのも，一般の位相空間においては点列の収束極限は唯一つとは限らないからである! このように，通常慣れ親しんでいる収束の概念とは若干異なる事態も生じるので注意が必要である．

演習 7.21 演習 7.15 で与えられた位相を考える．$a_n = n\ (n \geq 1)$ とおいて，点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考えよう．このとき $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は任意の実数に収束していることを示せ．

最後に，ある部分集合 $Y \subset X$ がつながっているかどうか (連結性) をどのように定義するかを紹介する．まず部分集合上の誘導位相について述べよう．

定義 7.22　位相空間 X の部分集合 Y が与えられたとき，X の開集合 U に対して，$Y \cap U$ を Y の開集合と定めると，$\{Y \cap U \mid U: X \text{の開集合}\}$ は Y の開集合系になる．この開集合系によって決まる Y の位相を X から**誘導された位相**と呼び，誘導位相を考えた部分集合 Y を X の**部分位相空間**と呼ぶ．

例 7.23 (**連結性**)　位相空間 X が**連結**であるとは，空でない開集合 U_1, U_2 に対して $X = U_1 \cup U_2$ であれば $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ が成り立つときに言う．この対偶を考えると，もし $X = U_1 \cup U_2$ かつ $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ となるような空でない開集合 U_1, U_2 が存在すれば X は非連結であるということになる．

部分集合 $Y \subset X$ が連結であるとは，部分位相空間として Y が連結になるときに言う．

実平面 $\mathbb{R}^2$ にユークリッド位相を入れて，その部分集合 Y を考えよう．2 つの開集合 U_1, U_2 が存在して，共通部分 $U_1 \cap U_2$ が空であるにもかかわらず Y が覆われたとしよう．また $Y \cap U_1 \neq \varnothing$ かつ $Y \cap U_2 \neq \varnothing$ とする．このとき $Y \cap U_1$ の点から $Y \cap U_2$ の点に連続的に移動しようとすると，かならず境界を通らねばならない．しかし開集合というのは境界のない集合のことだったから，その境界はどちらの U_1, U_2 にも属していない．したがって $Y \cap U_1$ と $Y \cap U_2$ の点を連続的に“つなぐ”ことは不可能である[8)]．

一般の位相についての話題はきりがないから，あとの話は専門書に譲ることにする[9)]が，最後に一言だけ注意をしておこう．“位相”という言葉を今まで耳にしたことがなかった読者はここでの説明を受けてずいぶん面食らったに違いない．人によっては今まで習った“連続性”に関する信念さえ揺らいだ人もいるだろう．しかし，位相空間はごく普通の連続性を厳密にし，しかも効率よく論ずるために生まれた概念である．今まで連続であったものは，もちろんこの新し

---

8) もちろんこれは厳密な議論ではない．ちなみに，任意の 2 点が連続曲線で結べるとき弧状連結というが，弧状連結性は連結性の概念より強い．ここでは，連結でない，だから弧状連結でないという議論をしたことになる．

9) 位相空間の話題を面白く料理することは結構難しい．しかし，位相空間論は現代の数学の基礎であるし，何よりも数学を記述する言葉であって，数学者にとっては空気のような存在である．位相に関する教科書には [49], [24], [26] などがあるので適宜参考にされたい．

い考え方でも連続になっている．あまり難しく考えすぎないようにしたい．

7.3.2 商空間の位相

さて，本題に戻ろう．我々は軌道空間に位相を入れて商空間を構成したいのである．そこで X を位相空間とし，G 自身も位相空間であるとしよう．さらに群 G の演算はこの位相に関して連続と仮定する．つまり 2 つの写像

$$\text{積}: G \times G \to G, \quad (g,h) \mapsto gh \quad \text{逆写像}: G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

がどちらも連続であると仮定する．このようなとき G を**位相群**と呼ぶ．位相群のことを**連続群**と呼ぶこともあるし，いわゆるリー群も位相群の一種である．慣れない読者の方は G を行列からなる群として，行列の各成分に関する連続性を考えていただければよい．この場合は，行列全体における積や (正則行列に対して) 逆行列を取る写像が連続なので，行列群の演算は自動的に連続になる．この後の章で登場するのは行列群ばかりである．

さて，位相群 G が位相空間 X に作用しており，この作用が連続であるとしよう．つまり定義 3.10 のように写像 $\alpha : G \times X \to X$ を用いて作用を定義したとき，この写像 α が連続であるという意味である．このとき $g \in G$ が引き起こす自己同型

$$\varphi(g) : X \to X, \quad \varphi(g)(x) = \alpha(g,x) \quad (x \in X)$$

を考えると，この自己同型は X 上の同相写像[10]になっている．

例 7.24 例 7.1 で考えた加法群 $G = \mathbb{R}$ の実平面 $X = \mathbb{R}^2$ への作用を思い出そう．これを写像 $\alpha : G \times X \to X$ を用いて表すと

$$\alpha : G \times X = \mathbb{R}^3 \to X = \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t,x,y) = (e^t x, e^{-t} y),$$

のようになり，成分がすべて解析関数で表されているから明らかに連続である (単に連続というより，微分可能とか解析的であるという方が当を得ているかもしれない)．さらに $\varphi : G \to \operatorname{Aut} X$ を考えると，

$$\varphi(t)(x,y) = (e^t x, e^{-t} y), \quad t \in \mathbb{R} = G,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 = X$$

となっているが，この逆写像は $\varphi(-t)$ であり，どちらも連続だから $\varphi(t)$ は $X = \mathbb{R}^2$ からそれ自身への同相写像になっている．

---

10) 連続かつ全単射であって，逆写像も連続のとき同相写像と呼ばれる．

演習 7.25　例 7.9 で与えられた共役作用は，G が有限群でなくても考えることができる．G が位相群なら共役作用は連続であることを示せ．また，例 7.11 で与えられた回転群の作用が連続であることを示せ．

位相群 G の X への連続な作用が与えられているとき，不変関数もまた連続なものを考えるのが自然である．そのように考えると，定理 7.8 で明らかになった『不変関数とはすなわち軌道空間上の関数である』という事実もまた連続性を考えた上で論じないと意味がないことに気がつくであろう．そのためには軌道空間 $\Omega_G(X)$ 上に位相を導入する必要がある．まず，軌道空間への射影を

$$\pi : X \to \Omega_G(X), \quad \pi(x) = \mathbb{O}_x \quad (x \in X) \tag{7.4}$$

によって定義しよう．

定義 7.26　軌道空間 $\Omega_G(X)$ の部分集合 U が開集合であるとは，$\pi : X \to \Omega_G(X)$ を射影とするとき $\pi^{-1}(U)$ が X の開集合になっているときにいう．

この定義によって軌道空間に開集合が定義されたが，もちろんこれらの開集合は §7.3.1 の冒頭にあげた開集合系の公理 (1)–(3) を満たしている．これを確かめることは読者の演習問題としよう．

演習 7.27　定義 7.26 で定義された開集合が実際に開集合系の性質を持っていることを示せ．

定義 7.26 によって軌道空間 $\Omega_G(X)$ 上の開集合系が与えられ，それによって位相が定まるが，このように位相を考えた軌道空間を**商空間**と呼び X/G で表す[11]．このようにして商空間 X/G は位相空間になるが，連続写像の定義によって射影

$$\pi : X \to X/G \tag{7.5}$$

は連続になることに注意しよう．この π を**商写像**とよぶ．容易に分かるように，

---

[11] この記号と定義はあまり一般的でないかもしれないので注意が必要である．というのも，通常は位相群 G も位相空間 X ももっと限定的な意味で考えるからである．例えばリー群 G による解析的な多様体 X への解析的な作用を考える場合には，商空間はやはり多様体であってほしいであろう．また代数群 G による代数多様体 X への代数的な作用を考えるときには，商空間は代数多様体の構造を持っていることが望ましい．しかし，このような商構造は一般に軌道空間上には存在せず，なんらかのトリックを使う必要がある．そのように技巧を駆使して得られた空間を一般に商空間と呼ぶのである．連続性に関しては何のトリックも必要がなく，本書ではある意味で一番安直な定義を採用していることになる．

商空間の位相は射影 π を連続にするような位相の中で最も弱い位相である．これを**商位相**と呼ぶ．

演習 7.28 X, Y を位相空間として連続写像 $f : X \to Y$ を考えよう．一般に X の位相を弱くすると連続写像の数は減少することを次のようにして確かめよ．

(1) X の位相が自明な位相 (密着位相) のとき，連続写像 f は定数写像であることを示せ．

(2) X の位相が離散位相であるとき，任意の写像 $f : X \to Y$ は連続であることを示せ．

(3) X 上に 2 つの異なる位相 τ_1, τ_2 が与えられているとする．位相 τ_1 が τ_2 より弱いとすると，τ_1 に関する連続写像 $f : X \to Y$ は位相 τ_2 に対しても連続であることを示せ．

(4) Y の位相の強弱によって連続写像の数がどう変化するか考えてみよ．

位相空間 X 上の複素数値連続関数全体のなすベクトル空間を $C(X)$ で表そう．したがって $C(X/G)$ は商空間上の連続関数の全体を表す．また，(連続とは限らない) 関数全体のなすベクトル空間に対して不変関数全体を $\mathrm{Fun}(X)^G$ と書いたように，連続な不変関数のなすベクトル空間を $C(X)^G$ で表そう．つまり $C(X)^G = \mathrm{Fun}(X)^G \cap C(X)$ である．

一般に連続写像 $\pi : X \to Y$ が与えられたとき，自然に連続関数の空間の間の線型写像 $\pi^* : C(Y) \to C(X)$ が

$$\pi^*(F)(x) = F(\pi(x)) = F \circ \pi(x) \quad (x \in X)$$

によって定まる．この $\pi^*(F)$ が連続関数であることは，連続写像 $F : Y \to \mathbb{C}$ および $\pi : X \to Y$ の合成であることから分かる．$\pi^*(F)$ を F の π による**引き戻し**という．

定理 7.8 の連続関数版が次の定理である．

定理 7.29 射影 $\pi : X \to X/G$ による引き戻し $\pi^* : C(X/G) \to C(X)^G$ は線型同型写像である．

証明 $F \in C(X/G)$ に対して $\pi^*(F)$ が連続であることは既に注意した．またこれが不変関数になることは，命題 7.7 より明らかである．このとき π^* が線型写像であることもまた明らかであろう．そこであとは π^* の逆写像を構成すれ

ば，線型同型であることが分かる．

逆写像は定理 7.8 で見たように $f \in C(X)^G$ に対して，

$$\nu(f)(\pi(x)) = \nu(f)(\mathbb{O}_x) = f(x)$$

と定義することによって得られる[12]．問題は $F := \nu(f) \in \mathrm{Fun}(X/G)$ が連続関数かどうかである．そこで $\mathbb{C}$ の開集合 U_0 を取ろう．このとき $U = F^{-1}(U_0)$ が開集合かどうかを見ればよい．ところが，$U \subset X/G$ が開集合であるかどうかはその商写像 π による逆像が開であるかどうかで決まるのであった．

$$\pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(F^{-1}(U_0)) = f^{-1}(U_0)$$

なので，f の連続性よりこれは開集合である．つまり U は開集合である．∎

例 7.30　ふたたび例 7.1 で考えた加法群 $G = \mathbb{R}$ の実平面 $X = \mathbb{R}^2$ への作用を思い出そう．

$$\varphi(t)(x, y) = (e^t\, x, e^{-t}\, y), \quad t \in \mathbb{R} = G,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 = X$$

であった．このとき，軌道空間とその上の位相を見てみよう．まず，軌道は

$$\mathbb{O}_{(x,x)}\ (x \neq 0), \quad \mathbb{O}_{(x,-x)}\ (x \neq 0), \quad \mathbb{O}_{(\pm 1,0)}, \quad \mathbb{O}_{(0,\pm 1)}, \quad \mathbb{O}_{(0,0)}$$

の 7 種類である．最初のものは $y = x$ という直線に沿ったパラメータ，その次のものは $y = -x$ という逆対角線上の直線に沿ったパラメータ，そして残りは 5 つの軌道になっている．そこでこれらの軌道を表すために

$\mathbb{O}_{(x,x)}\ (x \neq 0)$	の形の軌道全体を	$D^+ \simeq \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
$\mathbb{O}_{(x,-x)}\ (x \neq 0)$	の形の軌道全体を	$D^- \simeq \mathbb{R}^\times$,
$\mathbb{O}_{(\pm 1,0)}, \mathbb{O}_{(0,\pm 1)}, \mathbb{O}_{(0,0)}$	の 5 つの軌道を	$A_{\pm 1,0}, A_{0,\pm 1}, A_{0,0}$

と書こう (図 7.2)．このとき，$D^\pm$ の位相はごく普通の $\mathbb{R}^\times$ の位相である．次に，例えば $A_{1,0}$ の近傍として

$$U_\varepsilon^{(1,0)} = \{A_{1,0}\} \cup D^+_{(0,\varepsilon)} \cup D^-_{(0,\varepsilon)} \quad (\varepsilon > 0)$$

が取れる．ただし

$$D^\pm_{(a,b)} = \{(x, \pm x) \mid a < x < b, x \neq 0\} \simeq \mathbb{R}^\times \cap (a, b)$$

などと書くことにする．これらは基本近傍であって，すべての近傍を得るには

---

[12] この $\nu(f)$ を f の π による押し出しと呼んで $\pi_*(f)$ とも書く．

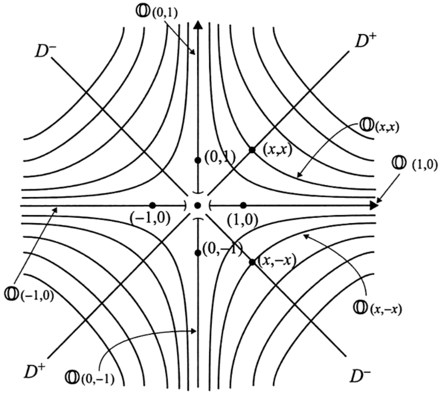


図 **7.2** 7 種類の軌道

ほかの (無限個の!) 開集合と和を取ったり，あるいは有限回の共通部分を取ったりする必要がある．また原点 $A_{0,0}$ の基本近傍としては $\varepsilon>0$ に対して

$$U_\varepsilon^{(0,0)}=\{A_{0,0},A_{1,0},A_{-1,0},A_{0,1},A_{0,-1}\}\cup D^+_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\cup D^-_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$$

を取ることができる．

この商位相はかなり奇妙なものである．というのも $A_{0,0}$ の近くにはかならず他の $A_{\pm1,0},A_{0,\pm1}$ が含まれているため，連続関数 F はこれらの 5 点で同じ値を取らなければならない．このことは次のように考えても分かる．

$X=\mathbb{R}^2$ 上の連続関数 $f(x,y)$ で G 不変なものを考えよう．このとき x 軸の正の部分 $\mathbb{O}_{(1,0)}=\{(x,0)\mid x>0\}$ は 1 つの G 軌道であるから，$f(x,y)$ は $\mathbb{O}_{(1,0)}$ 上で一定の値を取らなければならない．一方 $f(x,y)$ は連続だから，$f(x,0)=c\ (x>0)$ が一定値 c を取っていれば，その極限点である原点 (0,0) でも同じ値 c を取る必要がある．x 軸の負の部分や，y 軸についても全く同じことが言えるので，結局 $f(x,y)$ は x,y 軸上で一定値 c を取らなければならない．そして $f(x,y)$ を押し出したものが商空間 X/G 上の連続関数であるから，これら 5 点での値はすべて同じである．

もう 1 つ，単純だが面白い例をあげよう．

例 7.31 前の例と同様，$G=\mathbb{R}, X=\mathbb{R}^2$ とする．加法群 G の作用を

$$\phi(t)(x,y) = (e^t x, e^t y) \quad (t \in G,\ (x,y) \in X)$$

で決めよう．このとき，点 $(x,y) \neq (0,0)$ を通る G の軌道は，原点 $(0,0)$ を始点として (x,y) の方向にのびる半直線である．ただし，端点 $(0,0)$ は含まない．一方，原点 $(0,0)$ を通る軌道は原点のみからなる．

さて，この半直線状の軌道は必ず単位円と 1 点で交わるので，原点以外の点を通る軌道は単位円上の点と一対一に対応する．したがって軌道空間は

$$\Omega_G(X) = \{\mathbb{O}_{(\cos\theta, \sin\theta)} \mid 0 \leq \theta < 2\pi\} \cup \{\mathbb{O}_{(0,0)}\}$$

となる．商位相と商空間について考えてみよう．そこで

$$X/G = \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{A_{0,0}\} = S^1 \cup \{A_{0,0}\}$$

と置く．ここで S^1 は単位円周を表している．このとき $S^1 \subset X/G$ の位相は通常の単位円周の位相と同じである．変わっているのは $A_{0,0}$ の近傍であって，$A_{0,0}$ の近傍は空間全体 X/G のみである!

このことから結論できるのは，X/G 上の連続関数は定数関数のみであるということである．つまり $C(X)^G = \mathbb{C} \cdot 1$ が分かる．

一方，座標関数である x や y は相対不変式になっており，x/y や y/x は不変有理式である．これらの関数の多項式などもすべて不変有理式であるから，不変式に比して不変有理式は豊富にある．この場合，$y/x = k$ (定数) は直線 $y = kx$ を意味しており，それは 3 つの軌道 (半直線が 2 つと原点) の和集合である．

また，有理式や多項式に限らなければ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上で定義された関数

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{7.6}$$

も不変関数になっており，この 2 つの不変関数の値を決めれば，原点以外の軌道は唯一つに決まってしまう．このようなとき "2 つの関数 (7.6) は軌道を分離する" と言い表す．

第 8 章 軌道空間の幾何的構造

円や球あるいはトーラス面・双曲面といった普段から慣れ親しんだ幾何学的な対象がしばしば群の作用をその背後に隠していることがある．なぜだろうか? その問いに対する答の 1 つは，そのような幾何学的 “図形” が実は群の商空間として実現されていることにある．商空間は空間の群作用による “割り算” によって作り出されるような空間である．そしてそこでは不変式，あるいは不変関数がまさしく座標関数としての役割を果たすことになる．この典型例が楕円曲線と楕円関数の関係である．群が図形を作り出すその現場に降り立ってみよう．

8.1 等質空間

商空間の一番簡単な場合がいわゆる等質空間である．そこで G を位相群とし，位相空間 X に連続的に作用しているとしよう．$g \in G$ の作用を $X \ni x \mapsto gx \in X$ で表すことにする[1]．

定義 8.1 G の X への作用が**推移的**であるとは，X の任意の 2 点 x, y に対して $gx = y$ となるような $g \in G$ が存在することである．

作用が推移的であるとは，つまり空間 X 自身が 1 つの G 軌道になっているということである．もちろんこの場合は，軌道空間 $\Omega_G(X)$ は唯一点であり，商空間 X/G も 1 点からなる．1 点からなる空間の位相は唯一つしかなく，この場合，商空間には何も面白いことは起こらない．

定義 8.2 点 $x \in X$ に対して $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ と置いて，これを x の**固定部分群**と呼ぶ．

---

[1] 群の作用の定義 (定義 3.10) で述べたように，作用 gx を強調して $g \cdot x$ と記す場合もある．また，群 G における積も必要に応じて gh と書いたり $g \cdot h$ と書いたりするが，誤解は生じないであろう．

ここで G_x が確かに部分群であることを簡単に確認しておこう．既に §1.3 においても同様の議論をしたが，復習をかねて繰り返すことにする．まず G_x が積について閉じていることを示そう．そこで $g, h \in G_x$ とすると，

$$(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x$$

となり，gh は $x \in X$ を固定する．つまり $gh \in G_x$ である．明らかに単位元は x を固定するので，G_x は単位元を含む．また $g \in G_x$ とすれば，$x = gx$ の両辺に g^{-1} を作用させて，

$$g^{-1}x = g^{-1}gx = ex = x$$

となるから，逆元 g^{-1} も G_x の元である．以上で $G_x \subset G$ は部分群であることが分かった．

部分群 G_x による G への右移動による作用を考えよう (例 7.10 参照)．このとき商空間 $G/G_x = \{aG_x \mid a \in G\}$ は右剰余類の空間であって G は右剰余類を用いて軌道分解される．

$$G = \bigsqcup_{a \in G/G_x} aG_x$$

これを右剰余類分解と呼ぶのであった．ただし $a \in G/G_x$ は a が G/G_x の代表元を動くことを意味する．

定理 8.3　位相群 G が位相空間 X に連続かつ推移的に作用しているとする．任意の $x \in X$ に対して G_x を x の固定部分群とすると連続な全単射

$$\mu : G/G_x \xrightarrow{\sim} X$$

が存在する．

証明　写像 $\mu : G/G_x \ni gG_x \mapsto gx \in X$ を考えよう．もし $g, g' \in G$ が同じ剰余類を定義しているならば，つまり $gG_x = g'G_x$ であったとすると $g' = gh$ $(h \in G_x)$ と書けている．このとき

$$g'x = g(hx) = gx$$

となるから，写像 μ は右剰余類 gG_x の代表元の取り方に依らず，矛盾なく定義されている．作用は推移的であったから，$x \in X$ は G の作用によって任意の他の元 $y \in X$ に移る．したがって $\mu(gG_x) = gx = y$ となり μ は全射である．一方，$g, h \in G$ に対して $\mu(gG_x) = \mu(hG_x)$ となったとすると $gx = hx$ より

$h^{-1}gx = x$ である．これは $h^{-1}g \in G_x$ を意味するから，$gG_x = hG_x$ が成り立ち，これらは同じ右剰余類を定めている．したがって μ は単射であり，あわせて全単射であることが分かった．

次に μ が連続であることを示そう．そこで開集合 $U \subset X$ を取り，$\pi : G \to G/G_x$ を商写像として，π と μ の合成写像を考える．すると U の $\mu \circ \pi$ による逆像は

$$(\mu \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(\mu^{-1}(U)) = \{g \in G \mid gx \in U\}$$

であって，これは G の作用の連続性より G の開集合である．したがって商位相の定義より $\mu^{-1}(U)$ は G/G_x の開集合である．これは μ が連続であることを示している． ∎

例 8.4 定理 8.3 の主張に対して $\mu : G/G_x \to X$ は連続な全単射写像というだけでなく，同相写像ではないのか？ という疑問を持たれた読者の方もいるかも知れない．しかし，そうは都合よく事は運ばず，定理の主張が最善の主張なのである．それを理解するために次の例を考えよう．

位相空間 X に対して，X の同相写像からなる自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群 G が X に推移的に作用しているとしよう．このような例はたくさんあるが，最も簡単な場合では，通常の位相を考えた実数の集合 $X = \mathbb{R}$ に加法群としての $G = \mathbb{R}$ が平行移動で作用している場合を考えてみればよい．群 G には離散位相を考える[2)]．つまり G の任意の部分集合は開集合であるとしよう．すると G は位相群であり，このとき G の作用は連続である．実際，作用を定義する写像

$$\alpha : G \times X \longrightarrow X$$

が連続であることを見てみよう．任意の開集合 $U \subset X$ を取り，その逆像を考えると

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(U) &= \{(g, x) \in G \times X \mid gx \in U\} \\ &= \bigsqcup_{g \in G} \{(g, g^{-1}u) \mid u \in U\}\end{aligned}$$

2) 通常はこのような群にはコンパクト開位相と呼ばれる位相を考えるのが自然である．しかし，ここではより強い位相を考えている．もっとも $\mathrm{Aut}(X)$ にコンパクト開位相を考えても位相群にならないことがあるらしいので注意が必要である．

であるが，最後の式における集合の直和は $\{g\} \times g^{-1}U \subset G \times X$ の和であることに注意しよう．このとき $\{g\}$ は G の位相が離散位相なので開集合，また $g^{-1}U$ は $g \in \mathrm{Aut}(X)$ が X の同相写像を引き起こすとしたから U と同相な開集合である．したがって $\{g\} \times g^{-1}U$ は $G \times X$ の開集合，その和集合として $\alpha^{-1}(U)$ も開集合である．

ところがこの場合，G/G_x の商位相はやはり離散位相である．したがって X 自身が離散位相空間でなければ G/G_x は X と同相でない．

定義 8.5　位相群 G の閉部分群 H による商空間 G/H を**等質空間**と呼ぶ．

定理 8.3 とその後の例で見たように，位相群 G が位相空間 X に連続に作用していてその作用が推移的であるときには，連続全単射写像 $\mu: G/G_x \to X$ が存在し，等質空間 G/G_x と X はほとんど同じと言ってよい．だが，この設定では両者は同相ではないので，全く同じと思うには問題がある．

しかし，我々が普通に考えているような位相群とその作用では，全単射写像 $\mu: G/G_x \to X$ の逆写像が連続，したがって μ は同相写像になり，いろいろと都合のよいことが成り立つことが知られている．その代表的な例を定理の形で以下に記す．ただしこの定理に使われている用語はここでは説明しないし定理の証明も行わない[3)]．

定理 8.6　群 G が空間 X に推移的に作用しているとする．1 点 $x \in X$ の固定部分群を G_x で表す．

(1) G がリー群 (解析的な群) で高々可算個の連結成分を持つとする．X が C^r 級微分可能多様体 $(r = 1, 2, \ldots, \infty, \omega)$ で G の作用が C^r 級であるとき，等質空間 G/G_x もまた自然な C^r 級多様体の構造を持ち $G/G_x \simeq X$ (C^r 級微分可能多様体としての同型) が成り立つ．

(2) G が代数群であって X が代数多様体のとき，G/G_x は代数多様体であって $G/G_x \simeq X$ (代数多様体としての同型) が成り立つ．

この定理の意味と証明については，G がリー群の場合には [30], [52] などを，G が代数群のときには [25], あるいは英語になるが [1], [14] などを参照してほしい．

---

3) 定理の証明にはかなりの準備が必要で，多様体とは何か，リー群とは何か，代数群とは何かなどの本質的な問いに立ち戻る必要がある．

本書で今まで考えた例や以下現れる例では，ほとんどすべての場合に上の定理の仮定を満たしており，$G/G_x \simeq X$ が成り立つ．そこで，以下，定理が適用できるような場合には両者を同一視することにする．

あまり自明ではない例をいくつかあげておこう．

例 8.7 特殊直交群 $G = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ が 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ に行列の積で作用している場合を考えよう．この作用に関する $\mathbb{R}^3$ の軌道分解は例 7.3 で求めておいた．軌道は半径 $r > 0$ の球面になるのであった．

そこで，1 つの軌道，例えば単位球面 $X = S^2$ への G の作用を考えよう．X は 1 つの G 軌道であるから，X への G 作用は推移的である．

単位球面 X 上の 1 点 $x = {}^t(0,0,1)$ (北極) を考え，その固定部分群 G_x を求めてみよう．直交群の元はすべてある軸を中心とする回転行列なので，その固定点は軸上の点だけである．したがって $g \in G_x$ となるのは g が原点と北極を結ぶ直線，すなわち z 軸を中心とする回転である場合である．つまり

$$G_x = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, \theta \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$$

であって，これは 2 次の特殊直交群と同型である．球面は解析的多様体であり，特殊直交群はリー群なので，定理 8.6(1) によって

$$G/G_x = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \simeq S^2 = X$$

であることが分かる．

例 8.8 複素平面内で単位円周を考える．

$$X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{2\pi i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

単位円 X には実数の加法群 $G = \mathbb{R}$ が $e^{2\pi i\xi}$ $(\xi \in \mathbb{R})$ の掛け算によって作用している．つまり

$$\varphi(\xi)\, e^{2\pi i\theta} = e^{2\pi i\xi} e^{2\pi i\theta} = e^{2\pi i(\theta+\xi)} \quad (\xi \in G,\ e^{2\pi i\theta} \in X)$$

である．このとき，作用は明らかに推移的である．実際，任意の $e^{2\pi i\theta}, e^{2\pi i\eta} \in X$ に対して，$\xi = \eta - \theta \in G$ と置けば，$\varphi(\xi)\, e^{2\pi i\theta} = e^{2\pi i\eta}$ となる．

そこで $1 \in X$ の固定部分群を考えよう．

$$G_1 = \{\xi \in \mathbb{R} \mid \varphi(\xi) 1 = 1\} = \{\xi \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi i\xi} = 1\} = \mathbb{Z}$$

であるから，定理 8.6 (1) によって

$$G/G_1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1 = X$$

であることが分かる．例 7.4 では加法群 $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{R}$ への作用を考え，その軌道空間 $\Omega_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ を求めた．軌道空間はちょうど区間 $[0,1)$ と一対一に対応していたが，この節で考察したことから軌道空間 $\Omega_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ には商空間としての位相が入り，その位相で考えるとちょうど単位円周と同相になることが分かった．それは区間 $[0,1]$ において端点 $0, 1$ を同一視して得られると考えると分かりやすいだろう．

次に 2 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ とその部分群 $\mathbb{Z}^2$ を考えよう．$\mathbb{Z}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の元のうち，2 つの成分がいずれも整数であるような点の全体で，平面上に格子状に広がっている．上で考察したことから $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = S^1 \times S^1$ は，単位円周の直積であることが分かるが，これをもう少し見やすい形で書いてみよう．

そこで X を 3 次元空間内のドーナッツ形の曲面とする．

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2 + z^2 = b^2\} \quad (0 < b < a).$$

ここで a, b は定数であって，b はドーナッツの断面の円の半径を表し，a は断面の円の中心が描く円の半径を表す．X をトーラスと呼ぶ (図 8.1)．

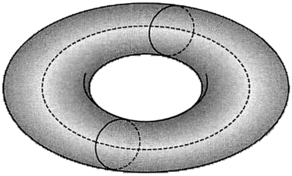


図 8.1　トーラス

トーラス X 上の点は $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ を用いて

$$(x,y,z) = (a\cos\theta + b\cos\theta\cos\varphi, a\sin\theta + b\sin\theta\cos\varphi, b\sin\varphi)$$

とパラメータ表示される．ただし (θ, φ) は周期 2π で考える．X には $G = \mathbb{R}^2$ がパラメータの平行移動

$$(\theta, \varphi) \mapsto (\theta + \xi, \varphi + \eta) \quad (\xi, \eta) \in G$$

で作用しており，1 点 $x = (a+b, 0, 0) \in X$ の固定部分群は

$$G_x = \{(2\pi n, 2\pi m) \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$$

である．したがって G/G_x はトーラス X と同相であるが，2π の倍率を掛けて考えれば $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq X$ であることが分かる．実際 2 つの円周の直積 $S^1 \times S^1$ はトーラスに他ならない．

例 8.9 空間 $\mathbb{R}^2$ において曲面 $x^2+y^2-z^2=k$ を考えてみよう．ここで $k \in \mathbb{R}$ は実定数で $k \neq 0$ と仮定する．

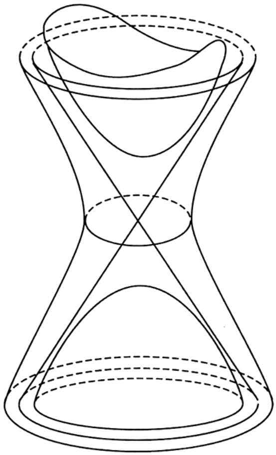


図 8.2 双曲面

この曲面は k の正負によって図 8.2 のように形が異なる．どちらの場合も xz 平面における双曲線 $x^2-z^2=k$ を z 軸の回りに回転した曲面であるが，$k>0$ の場合には双曲線の 2 つの分枝が回転することによって移りあうので，1 つの連結な曲面を生成し，**一葉双曲面**と呼ばれる．$k<0$ のときには双曲線の 2 つの分枝は回転で移りあうことなく，別々の回転面を生成し，この 2 つの曲面をあわせて**二葉双曲面**と呼ぶ．また両者を総称して**双曲面**と呼ぶ．

さて，双曲面上には不定値直交群

$$G = \mathrm{O}_{2,1}(\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \mid {}^t g\, I_{2,1}\, g = I_{2,1}\}, \quad I_{2,1} = \mathrm{diag}(1,1,-1)$$

が自然に作用していることを説明しよう．ここで $I_{2,1}$ は符号数 (2,1) の 2 次形

式 Q を定義する対称行列であって Q は

$$Q(\xi) = x^2 + y^2 - z^2 = {}^t\xi I_{2,1} \xi \quad \xi = {}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

と表される．

さて，$G = \mathrm{O}_{2,1}(\mathbb{R})$ は行列群として $\mathbb{R}^3$ に左からの積で自然に作用しているが，不定値直交群の定義より $g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} Q(g\xi) &= {}^t(g\xi) I_{2,1} (g\xi) = {}^t\xi ({}^t g\, I_{2,1}\, g)\xi \\ &= {}^t\xi I_{2,1} \xi = Q(\xi) \end{aligned}$$

が成り立つ．つまり 2 次形式 $Q(\xi)$ は G の作用による不変式である．したがって双曲面 $Q(\xi) = x^2 + y^2 - z^2 = k$ 上の点 ξ に対して $g\xi$ はまた同じ双曲面上に移っている．このようにして，G の行列群としての $\mathbb{R}^3$ への左からの積による作用はそれぞれの双曲面を保つことが分かる．

以下，特別な場合として $k = \pm 1$ のときを考えてみよう．

まず，一葉双曲面 $X_1 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ を考える．このとき不定値直交群 $G = \mathrm{O}_{2,1}(\mathbb{R})$ が X_1 に推移的に作用していることを示そう．それには任意の点 $\xi = {}^t(a,b,c) \in X_1$ を取り，これが G の作用によって ${}^t(1,0,0)$ に移ることを示せば十分である[4]．そこで次のような G の元を考えよう．

$$u_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

この元は $\mathbb{R}^3$ において z 軸を回転軸とする角度 θ の回転移動を引き起こす．双曲面 X_1 は xz 平面の双曲線 $x^2 - z^2 = 1$ を z 軸の回りに回転して得られる回転面だったから，この u_θ によって任意の点 $\xi \in X_1$ は ${}^t(d,0,c)$, $d^2 - c^2 = 1, d > 0$ に移すことができる $(d = \sqrt{a^2 + b^2})$．回転によって双曲線の分枝の 1 つ，$x > 0$ の部分にある分枝に重ねることができることに注意しよう．次にこの点をさらに

$$a_t = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

で動かす．この a_t は y 軸を軸とする**双曲回転**と呼ばれ，不定値直交群に属して

---

4) 座標と紛らわしいので $\xi = {}^t(a,b,c)$ と表した．

いる．

演習 8.10 $a_t \in \mathrm{O}_{2,1}(\mathbb{R})$ であることを示せ．また $\det a_t = 1$ であることを示して，実は $a_t \in \mathrm{SO}_{2,1}(\mathbb{R})$ であることを結論せよ．

双曲回転は通常の回転と同様の性質を持つが，特に重要なのは

$$a_t\, a_s = a_{t+s} \quad (t, s \in \mathbb{R}) \tag{8.1}$$

が成り立つことである．これは行列の計算と双曲線関数の加法定理を用いて示すことができるのでぜひ自分の手で確かめてほしい．この式より，$a_t a_{-t} = a_{-t} a_t = a_0 = 1_3$ が分かる．つまり $a_t^{-1} = a_{-t}$ が双曲回転の逆行列である．

xz 平面内で考えた双曲線 $x^2 - z^2 = 1$ の $x > 0$ にある部分の分枝上の点は ${}^t(d,0,c) = {}^t(\cosh t, 0, \sinh t)$ とパラメータ表示されるが，これを用いると

$$a_{-t}\, {}^t(\cosh t, 0, \sinh t) = {}^t(1,0,0)$$

となって確かに ${}^t(1,0,0)$ に移すことができる (図 8.3)．

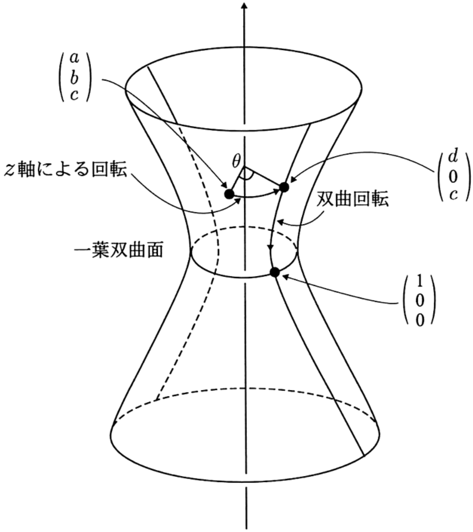


図 8.3 回転と双曲回転で任意の点を 1 点に移す

演習 8.11 一葉双曲面 $X_1 : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 上の点は

$$^t(\cos\theta\cosh t, \sin\theta\cosh t, \sinh t) \ \ (0 \leq \theta < 2\pi,\ t \in \mathbb{R})$$

とパラメータ表示されることを示せ．

G の X_1 への推移的な作用が得られたので，X_1 を等質空間として表してみよう．そこで 1 点 $\xi = {}^t(1,0,0)$ の固定部分群 G_ξ を計算しよう．最初に一般の行列 $g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ を考え，まず g が ξ を固定するための条件を求めると

$$g = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & u & v \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A}} \\ 0 & & \end{array}\right), \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の形をしていることが分かる．これが $\mathrm{O}_{2,1}(\mathbb{R})$ に属しているので

$$I_{2,1} = {}^t g\, I_{2,1}\, g = \left(\begin{array}{c|c} 1 & u \quad v \\ \hline \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} & {}^t A I_{1,1} A + u^2 + v^2 \end{array}\right), \quad I_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．したがって $u = v = 0$ かつ

$${}^t A I_{1,1} A = I_{1,1}$$

が成り立つが，最後の条件は $A \in \mathrm{O}_{1,1}(\mathbb{R})$ を意味している．したがって $G_\xi \simeq \mathrm{O}_{1,1}(\mathbb{R})$ が分かり，定理 8.6 (1) によって一葉双曲面は

$$X_1 \simeq \mathrm{O}_{2,1}(\mathbb{R})/\mathrm{O}_{1,1}(\mathbb{R})$$

と表される．

2 次形式 $Q(\xi) = x^2 + y^2 - z^2$ は $\mathbb{R}^3$ における $G = \mathrm{O}_{2,1}(\mathbb{R})$ の不変式であった．不変式は軌道上で一定の値を取るから，任意の軌道は，ある定数 k に対して曲面 $X_k : Q(\xi) = k$ に含まれている．上で示したことにより，$k > 0$ のときは $Q(\xi) = k$ は一葉双曲面で連結であり，唯一つの軌道からなることが分かった．そこで次に $k < 0$ のときを考えよう．

以下 $k = -1$ の場合を考える．このとき $X_{-1} : Q(\xi) = x^2 + y^2 - z^2 = -1$ は二葉双曲面を表している．$G = \mathrm{O}_{2,1}(\mathbb{R})$ がこの双曲面上にやはり推移的に作用していることを確かめよう．任意の点 $\xi = {}^t(a,b,c) \in X_{-1}$ をとると，一葉双曲面のときと同じようにして，回転 u_θ によってこの点は xz 平面上の双曲線 $x^2 - z^2 = -1$ の上に移すことができる．さらにこれを双曲回転 a_t で動かすの

だが，この場合双曲線の 2 つの分枝は z 軸を中心とする回転によって移りあわず，別々の曲面を生成するのであった．したがって a_t で動かして得られるのは ${}^t(0,0,\pm1)$ の 2 点である (図 8.4).

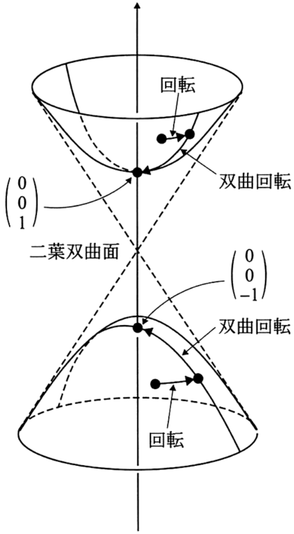


図 8.4 回転と双曲回転で任意の点を 2 点に移す

ところが，$\mathrm{diag}(1,1,-1)$ は $G=\mathrm{O}_{2,1}(\mathbb{R})$ の元になっており，最後の 2 つの点 ${}^t(0,0,\pm1)$ はこの元で互いに移りあう．したがって，最終的に任意の点 $\xi\in X_{-1}$ は ${}^t(0,0,1)$ に移すことができ，G の X_{-1} への作用は推移的である．

そこで X_{-1} を等質空間として表すことを考え，$\xi={}^t(0,0,1)$ に対して，固定部分群 G_ξ を計算すると，上の計算と同様にして

$$G_\xi=\left\{ g=\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \hline 0\ 0 & 1\end{array}\right) \;\middle|\; A\in\mathrm{O}_2(\mathbb{R})\right\}\simeq\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

であることが分かる．したがって二葉双曲面は

$$X_{-1}\simeq\mathrm{O}_{2,1}(\mathbb{R})/\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

と表されることになる．

これで不変式 $Q(\xi)=x^2+y^2-z^2$ に対して，$k\neq 0$ ならば $Q(\xi)=k$ は唯一つの軌道からなり，不変式によって群の軌道がほぼ分類できることが分かった．

あと残っているのは $X_0: x^2+y^2-z^2=0$ の場合だが，この曲面は**零錐**と呼ばれる[5)]．しかし残念ながら零錐は一つの軌道にはならず，2 つの軌道 $\{0\}$ と残り $X_0\setminus\{0\}$ に分解する．

このように，不変式はほとんどの軌道を分離し，軌道を分類するパラメータの役目を果たすが，万能というわけではないことに注意しておこう．

いくつかの例を見てきたが，等質空間と同一視することで空間のいろいろな性質が見やすくなることもある．そこで応用として「3 次元空間内の鏡映がどのくらいあるのか」という問題を考えてみよう．“どのくらいあるのか” という表現はかなり曖昧であるが，等質空間を導入することでこの言葉の意味もはっきりしてくる．

3 次の直交群 $G=\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ を考えると，G の元は原点を通る軸を中心とする回転と，原点を通る平面に関する鏡映と回転との合成かいずれかであった (例 7.3)．特に鏡映の全体は G の部分集合とみなすことができる．そこで

$$X=\{r\in\mathrm{O}_3(\mathbb{R})\mid r \text{ は鏡映 }\}$$

と置こう．直交群 G は X に共役で作用する．つまり

$$\varphi(g): X\to X,\quad \varphi(g)r=grg^{-1}\quad (g\in G, r\in X)$$

である．このとき r が鏡映ならば grg^{-1} もまた鏡映であることを確かめておかなければならない．鏡映面を H とし，H の法線方向を表す単位ベクトルを u とする．すると (3.3) 式により平面 H に関する鏡映 S_u は

$$S_u=1_3-2u\cdot{}^tu \tag{8.2}$$

と行列表示されるのであった．したがって $g^{-1}={}^tg$ に注意すると

$$\begin{aligned} gS_ug^{-1}&=g(1_3-2u\cdot{}^tu)g^{-1}=1_3-2gu\cdot{}^tu\,{}^tg\\ &=1_3-2(gu)\cdot{}^t(gu)=S_{gu}\end{aligned}$$

---

5) 不定値直交群 $\mathrm{O}_{3,1}(\mathbb{R})$ は相対性理論に登場するが，それとの類似から光錐と呼ばれることもある．

と計算できるが，最後の式は単位ベクトル gu を法線とする平面に関する鏡映に他ならない．また $G = \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ は単位球面に推移的に働いていたので，gu の形の単位ベクトルは単位球面上の任意のベクトルを表す．したがって，$gS_u g^{-1} = S_{gu}$ は空間内の原点を通る平面に関する任意の鏡映を表している．つまり共役作用 $G \curvearrowright X$ は推移的である．

そこで一番簡単な鏡映 $r = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$ (xy 平面に関する鏡映 $=$ z 座標の反転) を取り，この固定部分群を求めてみよう．$r = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$ が例 8.9 で扱った 2 次形式を表す行列 $I_{2,1}$ と等しいことを考えると

$$
\begin{aligned}
G_r &= \{g \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \mid grg^{-1} = r\} \\
&= \{g \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \mid gr\,{}^t g = r\} = \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2,1}(\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

であるが，$A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $u, v \in \mathbb{R}^2$, $d \in \mathbb{R}$ に対して $g = \begin{pmatrix} A & u \\ {}^t v & d \end{pmatrix}$ と置くと

$$
grg^{-1} = r \iff gr = rg \iff \begin{pmatrix} A & -u \\ {}^t v & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & u \\ -{}^t v & -d \end{pmatrix}
$$

だから，$u = v = 0$ である．一方 $g \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ なので $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ かつ $d = \pm 1$ でなければならない．結局

$$
G_r = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \,\middle|\, A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}),\ \varepsilon = \pm 1 \right\} \simeq \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}_1(\mathbb{R})
$$

となることが分かった．したがって

$$
X \simeq G/G_r = \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \,/\, (\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}_1(\mathbb{R}))
$$

が鏡映全体のなす多様体 X の等質空間としての表示である．

さて，鏡映は鏡映面の単位法線方向によって決まるが，法線方向は 2 つあるので，単位ベクトル $\pm u$ は同じ鏡映を表す．この 2 つの逆向きの単位ベクトル $\pm u$ は単位球面の直径の両端であり，ちょうど対蹠点となっている．一方，球面内の対蹠点同士を同一視した空間が射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ なのであった (§6.2 参照)．つまり $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ は鏡映の全体 X と同一視できる．

系 8.12 実射影平面は等質空間であり，$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \,/\, (\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}_1(\mathbb{R}))$ と表すことができる．

8.2　同伴ファイバー束

等質空間は群が作用する空間の中で最も簡単かつ単純なものである．一般の空間はずっと複雑なものが多いが，その中でも比較的簡単な種類の空間がいくつかある．この節では，後々の応用も視野に入れて，同伴ファイバー束の紹介をしよう．

G を群とし，H をその部分群とする．以下ほとんどの場合に G は行列群 (リー群) であって，H はその閉部分群である．

部分群 H が空間 W に作用しているとしよう．このとき，直積 $G \times W$ にも H が

$$\varphi(h)(g,w) = (gh^{-1}, hw) \quad (h \in H,\ (g,w) \in G \times W)$$

のように作用する．この作用による商空間を $G \times_H W$ と書いて，G/H に**同伴するファイバー束**，あるいは単に**同伴ファイバー束**という．つまり

$$G \times_H W = (G \times W)/H$$

である．

同伴ファイバー束 $G \times_H W$ は集合としては軌道空間 $\Omega_H(G \times W)$ と同じものである．このとき $(g,w) \in G \times W$ を通る H の軌道は

$$\mathbb{O}^H_{(g,w)} = \{(gh^{-1}, hw) \mid h \in H\}$$

なので (g,w) と (gh^{-1}, hw) は同じ軌道に属する．商空間であるファイバー束 $G \times_H W$ では 1 つの軌道を 1 点とみなすので，(g,w) を通る軌道も (gh^{-1}, hw) を通る軌道も同じ 1 点とみなすことになる．したがって直積 $G \times W$ に

$$(g,w) \sim (gh^{-1}, hw) \quad (h \in H)$$

という同値関係 $\sim$ を入れ，これによって同値類に分けるとその同値類全体が $G \times_H W$ になる．そこで (g,w) の同値類，あるいは同じことだが軌道 $\mathbb{O}^H_{(g,w)}$ を $[g,w]$ のように表すことにしよう．集合としては

$$G \times_H W = \{[g,w] \mid (g,w) \in G \times W\} = G \times W/\sim$$

である．最右辺の記号は $G \times W$ の元を同値関係 $\sim$ で同一視した同値類の集合を表す記号である．

$G \times_H W$ がなぜファイバー束と呼ばれるのかを説明しよう．写像 $\rho : G \times_H$

$W \to G/H$ を $\rho([g,w]) = gH \in G/H$ で決める．この写像は代表点 (g,w) の取り方に依らずに決まっている．実際代表点を取り替えて $(g,w) \sim (gh^{-1}, hw)$ とすれば，$\rho([gh^{-1}, hw]) = gh^{-1}H = gH$ だからこれらの代表点はどちらも同じ点 $gH \in G/H$ に移っている．このとき 1 点の逆像は

$$\rho^{-1}(gH) = \{[g,w] \mid w \in W\} \simeq W$$

であって，すべて W に同型である．G/H を**底空間**，W を**ファイバー**，ρ をファイバー束から底空間への射影と呼ぶ．逆像のことをファイバーと呼ぶこともあるが，底空間 G/H 上の各点に同じファイバー W が立っている状態なので，ファイバーを束ねたような空間という意味でファイバー束と呼ぶのである[6)]．

同伴ファイバー束は次の節において重要な役割を果たし，その例も多数あげられているが，ここでは球面の接平面について少し考えてみる．

例 8.13 空間内の単位球面 S^2 を考える．特殊直交群 $G = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ が単位球面上に推移的に作用し，球面 S^2 は G の等質空間である．このとき $x = {}^t(0,0,1)$ の固定部分群 H は z 軸を軸とする回転の全体となり，$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ と同型である．球面は等質空間として $S^2 \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = G/H$ と書けるのであった．

さて，$H = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ は平面 $W = \mathbb{R}^2$ に回転として自然に作用する．この作用を用いて同伴ファイバー束

$$G \times_H W = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \times_{\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})} \mathbb{R}^2$$

を考えることができる．これは底空間 G/H が球面 S^2 でファイバー W が平面 $\mathbb{R}^2$ のファイバー束であるが，ちょうど球面上の各点にその接平面を対応させることにあたり，**接束**と呼ばれる．

単にファイバーを束ねればよいのであれば，各ファイバーを同じ方向に束ねて $S^2 \times \mathbb{R}^2$ とすることも考えられる．このようなファイバー束は自明なファイバー束と呼ばれるが，球面の接束は自明なファイバー束と同型ではないことが知られている．

演習 8.14 $W = \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^3$ における xy 平面とみなし，$H = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ を z 軸の回りの回転移動の全体がなす $G = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ の部分群，$e_3 = {}^t(0,0,1)$ を基

---

6) ファイバー束の正確な定義や性質については [15], [6] を参照するとよいだろう．また [30] の第 10 章にも同伴ファイバー束に関する解説がある．

本ベクトルとする．このとき，写像

$$G \times_H W \ni [g,w] \mapsto g(e_3 + w) \in \mathbb{R}^3$$

は矛盾なく定義されていることを示し，$g(e_3 + W)$ はちょうど単位球面上の点 ge_3 における接平面であることを示せ．この写像は同型写像であって，このようにして $G \times_H W$ と球面 S^2 の接束 TS^2 は同一視できる．

8.3　2 次曲線と直線の配置問題

群の軌道と商空間の応用として，実射影平面における (非退化) 2 次曲線と直線の配置問題を考えてみよう．

実射影平面の斉次座標を $[x:y:z]$ で表そう．斉次座標を用いると，2 次曲線は 3 次の実対称行列 Q によって

$${}^t v Q v = 0, \quad v = {}^t(x,y,z)$$

と表される．実対称行列 Q が正則のとき，2 次曲線は非退化であると言い表すのであった．さて，行列 Q を定数倍しても方程式 ${}^t vQv = 0$ は変わらないので，2 次曲線と対称行列は若干違う．しかし，我々はとにかく正則な実対称行列全体を考えることにして，それを $\mathrm{Sym}_3^\circ(\mathbb{R})$ と書くことにする．

同様に考えると，射影平面における直線は $w = {}^t(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ に対して

$$w \cdot v = ax + by + cz = 0, \quad v = {}^t(x,y,z)$$

と書ける．この場合でも，係数をゼロでない定数倍で置き換えても直線そのものは変わらないので，本来 $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ の代わりに $[w] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ を考えるべきであるが，ここでは簡単のために係数そのものを考えよう．そこで

$$X = \mathrm{Sym}_3^\circ(\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$$

と置き，この空間への一般線型群 $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ の作用

$$\varphi(g)(Q,w) = (gQ\,{}^t g, gw), \quad g \in G,\ (Q,w) \in X \tag{8.3}$$

を考えたい．もちろん $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ は射影変換群 $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ を念頭に置いてのことである．この作用について少し説明しておきたい．式 (6.8) で見たように，射影変換 π_g $(g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}))$ の 2 次曲線への作用は，対称行列を用いると $Q \in \mathrm{Sym}_3^\circ(\mathbb{R})$ を ${}^t g^{-1} Q g^{-1}$ に写すような作用になる．同様にして，直線の射影変換

による像は直線の係数 w を用いて書くと $w \mapsto {}^t g^{-1} w$ である．上で与えた作用 (8.3) はこのような射影変換による作用と若干異なるが，$\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ の中で $g \mapsto {}^t g^{-1}$ と置き換えて考えれば結局同じことである．ここでは記号を徒に煩雑にしないように作用 (8.3) を用いて以下考えることにする．

まず軌道空間 $\Omega_G(X)$ を求めてみよう．それには，G の作用による対称行列の標準形に注目する．補題 6.10 によれば，適当な $g \in G$ により

$$gQ\,{}^t g = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad \varepsilon_i = \pm 1 \ (i = 1,2,3) \tag{8.4}$$

とできるのであった．したがって，X の軌道として $\mathbb{O}_{(\mathrm{diag}(\pm 1, \pm 1, \pm 1), w)}$ の形のものを考えれば十分である．

あとで必要になるので，ここで記号を導入しておく．既に正則な対称行列の空間 $\mathrm{Sym}_3^\circ(\mathbb{R})$ を考えたが，この空間は対称行列の符号数によって 4 つの連結性分に分解する．**符号数**は実対称行列の固有値の符号によって定まり，一般に正の符号の固有値の個数を p, 負の固有値の個数を q とすると (p, q) で表す．式 (8.4) のように Q を表しておくと，符号数は要するに ε_i のうち 1 の個数を p, -1 の個数を q としてそれを並べたものである．

符号数が $(3,0)$ の対称行列を**正定値対称行列**と呼び，その全体を $\mathrm{Sym}_3^+(\mathbb{R})$ と書く．同様に符号数が $(0,3)$ のものを負定値対称行列と呼び，その全体を $\mathrm{Sym}_3^-(\mathbb{R})$ で表す．また符号数が $(2,1)$ および $(1,2)$ の対称行列の空間をそれぞれ $\mathrm{Sym}_3^{(2,1)}(\mathbb{R})$ および $\mathrm{Sym}_3^{(1,2)}(\mathbb{R})$ と表そう．すると

$$\mathrm{Sym}_3^\circ(\mathbb{R}) = \mathrm{Sym}_3^+(\mathbb{R}) \sqcup \mathrm{Sym}_3^{(2,1)}(\mathbb{R}) \sqcup \mathrm{Sym}_3^{(1,2)}(\mathbb{R}) \sqcup \mathrm{Sym}_3^-(\mathbb{R})$$

が成り立っている．以下，場合分けして考えよう．

8.3.1　直交群の軌道

軌道の形が $\mathbb{O}_{(1_3, w)}$ の形のものを考えてみる．ただし $1_3 = \mathrm{diag}(1,1,1)$ は単位行列である．すると

$$\mathbb{O}_{(1_3, w)} = \{(g\,{}^t g, gw) \in X \mid g \in G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})\}$$

である．このとき，代表点 $(1_3, w)$ において w の方もできるだけ便利なものに選びたいが，それには第 1 成分である対称行列を単位行列 1_3 に保ったまま w だけを動かせばよい．したがって ${}^t g g = 1_3$ となっている $g \in G$ で w を動かすことを考えよう．それはつまり 3 次の直交群

$$K = \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \mid g\,{}^t g = 1_3\}$$

の $Y = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ への作用を考えることに他ならない．この作用に関する軌道空間は，例 7.3 で既に調べてある．それを商空間の言葉を用いて補題の形にまとめておこう．

補題 8.15　直交群 $K = \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ の $Y = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ への作用による軌道は半径 r の球面である．

$$\mathbb{O}_r^K = \{v \in Y \mid \|v\| = r\}.$$

したがって商空間は $Y/K \simeq \mathbb{R}_{>0}$ と正の実数全体と同一視でき，商写像は

$$\pi : Y \to \mathbb{R}_{>0}, \quad \pi(v) = \|v\|$$

で与えられる．

この補題により，X における G 軌道であって，対称行列 $Q = 1_3$ を通るものは $r > 0$ に対して $\mathbb{O}^G_{(1_3, re_1)}$ と表されることが分かった．ただし $e_1 = {}^t(1,0,0)$ は基本ベクトルである．この軌道がどのような “形” をしているかはそれほど簡単ではないが，少し調べてみよう．

軌道 $\mathbb{O}^G_{(1_3, re_1)}$ に属する点 (Q, w) を取ると，代表点 $(1_3, re_1)$ に $g \in G$ を作用させて

$$(Q, w) = \varphi(g)(1_3, re_1) = (g\,{}^t g, rge_1)$$

と書けている．この表示を用いて ${}^t w Q^{-1} w$ を計算してみると

$$\begin{aligned} {}^t w Q^{-1} w &= {}^t(rge_1)(g\,{}^t g)^{-1}(rge_1) \\ &= r^2\,{}^t e_1({}^t g\,{}^t g^{-1})(g^{-1} g)e_1 = r^2\,{}^t e_1 1_3 e_1 = r^2 \end{aligned}$$

となり，これは $g \in G$ によらない不変式である．いま，Q, w を成分表示して

$$Q = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表し，また Q の余因子行列を $\widetilde{Q}$ と書くと，

$${}^t w Q^{-1} w = \frac{1}{\det Q}\,{}^t w \widetilde{Q} w$$

$$= \frac{1}{\det Q}(x,y,z)\,{}^t\left(\begin{vmatrix} x & b & d \\ y & c & e \\ z & e & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & x & d \\ b & y & e \\ d & z & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & x \\ b & c & y \\ d & e & z \end{vmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{\det Q}\left\{\begin{vmatrix} x^2 & b & d \\ xy & c & e \\ xz & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & yx & d \\ b & y^2 & e \\ d & yz & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & zx \\ b & c & zy \\ d & e & z^2 \end{vmatrix}\right\}$$

となっている．ただし 2 番目の等式では Cramer の公式[7] を用いた．したがって ${}^t w Q^{-1} w = r^2$ は

$$\begin{vmatrix} x^2 & b & d \\ xy & c & e \\ xz & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & yx & d \\ b & y^2 & e \\ d & yz & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & zx \\ b & c & zy \\ d & e & z^2 \end{vmatrix} = r^2 \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \tag{8.5}$$

と表される．これが軌道 $\mathbb{O}^G_{(1_3, re_1)}$ の満たす方程式である[8]．$X = \mathrm{Sym}_3^\circ(\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ は 9 次元の空間であるが，軌道 $\mathbb{O}^G_{(1_3, re_1)}$ はその中で 4 次式で定義される超曲面の一部をなしており，その次元は 8 である．これを別の形で確かめておこう．

定理 8.16　$G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ とし，G の $X = \mathrm{Sym}_3^\circ(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ への作用 (8.3) を考える．$K = \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ を直交群，点 $(1_3, re_1) \in X$ を通る G の軌道を $\mathbb{O}^G_{(1_3, re_1)}$ とするとき，同型

$$\mathbb{O}^G_{(1_3, re_1)} \simeq G \times_K S_r$$

が成り立つ．ここで右辺は $G/K \simeq \mathrm{Sym}_3^+(\mathbb{R})$ (正定値対称行列の空間) 上の半径 r の球面 S_r をファイバーとする同伴ファイバー束である．

この定理により，軌道 $\mathbb{O}^G_{(1_3, re_1)}$ の次元は

$$\dim \mathbb{O}^G_{(1_3, re_1)} = \dim G/K + \dim S_r = 6 + 2 = 8$$

と計算できる．

証明　同伴ファイバー束から軌道への写像 Ψ を

$$\Psi : G \times_K S_r \to \mathbb{O}^G_{(1_3, re_1)},$$

7) Cramer, Gabriel (1704–1752). 連立一次方程式の解を行列式で表す公式でクラーメルあるいはクラメールの公式と呼ばれる．例えば [41] 参照.

8) ただし，この方程式を満たす点は 2 つの連結成分に分かれ，その双方が G 軌道になる．軌道 $\mathbb{O}^G_{(1_3, re_1)}$ を指定するにはその一方，具体的には Q が正定値対称行列になる部分を取る必要がある.

$$\Psi([g,w]) = (g\,{}^t g, gw), \quad [g,w] \in G \times_K S_r$$

で決める．写像 Ψ は (g,w) の選び方によらず矛盾なく決まっていることに注意しよう．実際 $k \in K$ に対して $(g,w) \sim (gk, k^{-1}w)$ は同じファイバー束上の点を表しているが，

$$\Psi([gk, k^{-1}w]) = (gk\,{}^t(gk), gkk^{-1}w) = (g(k\,{}^t k)\,{}^t g, gw) = (g\,{}^t g, gw)$$

となって，どちらの表示で計算しても結果は同じである．Ψ は明らかに全射であるが，単射でもあることを示そう．そこで $\Psi([g,w]) = \Psi([h,z])$ とすると Ψ の定義より

$$(g\,{}^t g, gw) = (h\,{}^t h, hz) \tag{8.6}$$

が成り立つ．まず $g\,{}^t g = h\,{}^t h$ であることから $(h^{-1}g)\,{}^t(h^{-1}g) = 1_3$ が導かれ，したがって $h^{-1}g \in K$ である．そこで $g = hk\ (k \in K)$ と表すと，式 (8.6) の第 2 成分を比較して，

$$hkw = hz, \quad \therefore\ kw = z$$

が成り立つ．このことから $(g,w) = (hk, k^{-1}z)$ となる $k \in K$ が存在することが分かり，同伴ファイバー束の定義から $[g,w] = [h,z]$ が成り立つ．以上で Ψ は全単射であることが分かった．

全単射写像 Ψ が微分同相であることを示すには，微分 $d\Psi$ を計算して，それが接空間の間の全射であることを示せば陰関数の定理から微分同相であることが従う．残念ながら本書ではこの部分は省略せざるを得ない．　∎

いろいろ考えてきたが，この軌道 $\mathbb{O}_{(1_3, re_1)}$ の場合，もともと考えていた 2 次曲線は斉次座標で $x^2+y^2+z^2=0$ であって，非斉次座標では $X^2+Y^2+1=0$ という方程式になっている．もちろんこれを実平面上で考えると，方程式を満たすような点はなく，2 次曲線は空である．

そこで，実際の 2 次曲線に使える場合，つまり不定値 2 次形式 $x^2+y^2-z^2=0$ に関する軌道を考えよう．

8.3.2　不定値直交群の場合

この節では，軌道の形が $\mathbb{O}_{(I_{2,1}, w)}$ の形のものを考えてみる．ただし $I_{2,1} = \mathrm{diag}(1,1,-1)$ は符号数が $(2,1)$ の対称行列である．

以下，しばらくの間，2 次形式を $Q(w)=x^2+y^2-z^2$ と書く．ただし $w={}^t(x,y,z)$ である．いままで Q を対称行列を表す記号に用いてきたが，要するに対称行列 Q と 2 次形式 $Q(w)$ を同一視して考えようということであり，対称行列が $Q=I_{2,1}$ のときには

$$Q(w)={}^twQw={}^twI_{2,1}w=x^2+y^2-z^2$$

のようになる．さて，問題の軌道は

$$\mathbb{O}_{(I_{2,1},w)}=\{(gI_{2,1}{}^tg,gw)\in X\mid g\in G\}$$

と表されているが，w は $gI_{2,1}{}^tg=I_{2,1}$ を満たすような g の元で動かして都合の良い形にすることができる．このような $g\in G=\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ の全体は不定値直交群 $H=\mathrm{O}_{2,1}(\mathbb{R})$ になるが，H の $\mathbb{R}^3$ への作用については例 8.9 で考察した．それによると，$k\neq 0$ なら $Q(w)=x^2+y^2-z^2=k$ は H のただ 1 つの軌道からなる．一方，$k=0$ のときには，$Q(w)=x^2+y^2-z^2=0$ は 2 つの軌道 $\{0\}$ と $\{w\in\mathbb{R}^3\mid w\neq 0,\ Q(w)=0\}$ に分かれる．ところが我々は今は G の作用する空間として $X=\mathrm{Sym}_3^\circ(\mathbb{R})\times(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$ を考えているので，H の軌道として $\{0\}$ は現れない．

以上のことから，結局 H によって $w\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ を動かすことによって re_1 か，e_1+e_3 か，または re_3 を代表元として選ぶことができることが分かる[9)]．これをまとめると

2 次形式の値	代表元	曲面
$Q(w)=r^2>0$	re_1	一葉双曲面
$Q(w)=0$	e_1+e_3	開零錐
$Q(w)=-r^2<0$	re_3	二葉双曲面

(8.7)

となる．そこで Hyp_k で双曲面 $x^2+y^2-z^2=k$ を表そう．$k>0$ のときは一葉，$k<0$ のときは二葉の双曲面になるが，便宜上 $k=0$ のときにも考えてこれを開零錐 (零錐 $x^2+y^2-z^2=0$ から原点 $\{0\}$ を除いたもの) とする．

定理 8.17　$G=\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ の $X=\mathrm{Sym}_3^\circ(\mathbb{R})\times(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$ への作用 (8.3) を考える．$H=\mathrm{O}_{2,1}(\mathbb{R})$ を不定値直交群，点 $(I_{2,1},w)\in X$ を通る G の軌道を $\mathbb{O}^G_{(I_{2,1},w)}$ とすると，w の代表元として式 (8.7) にあげた 3 種類のベクトルを取

9) もちろん e_1,e_2,e_3 は基本ベクトルを表す．

ることができ，

$$\mathbb{O}^G_{(I_{2,1},re_1)} \simeq G \times_H \mathrm{Hyp}_{r^2},$$

$$\mathbb{O}^G_{(I_{2,1},e_1+e_3)} \simeq G \times_H \mathrm{Hyp}_0,$$

$$\mathbb{O}^G_{(I_{2,1},re_3)} \simeq G \times_H \mathrm{Hyp}_{-r^2}$$

が成り立つ．右辺はいずれも $G/H \simeq \mathrm{Sym}_3^{(2,1)}(\mathbb{R})$ (符号数が $(2,1)$ の対称行列全体) 上の双曲面 Hyp_k をファイバーとする同伴ファイバー束である．

証明は定理 8.16 と同様であるから，各自試みられたい．

点 $(Q,w) \in X$ を通る G 軌道 $\mathbb{O}_{(Q,w)}$ の分類と軌道の構造を Q が正定値の場合と符号数が $(2,1)$ の場合に考えてきた．Q の符号数が $(1,2)$, $(0,3)$ (つまり負定値) の場合には Q の代わりに $-Q$ を考えればよいので，議論は全く同様である．

そこで軌道についての考察はこの辺りでいったん措いて，本来の問題，2 次曲線と直線の配置問題を考えてみよう．

8.3.3　2 次曲線と直線

斉次座標を $\xi = {}^t(x,y,z)$ として，射影平面内の 2 次曲線

$$Q(\xi) = {}^t\xi Q \xi = 0 \quad (Q \in \mathrm{Sym}_3^\circ(\mathbb{R}))$$

と直線

$$w \cdot \xi = ax + by + cz = 0 \quad (w = {}^t(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$$

の組を考える．このとき，射影変換によって 2 次曲線と直線の配置がどのように移りあうのかを考えるのが本来の問題であった．ここまでは (Q,w) の組を考えていたが，2 次曲線は Q をゼロでない定数倍しても変わらないし，直線もその係数を定数倍しても変わらないから，射影変換も含めると我々が考えるべきなのは $G \times \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times$ の作用で，$\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times$ の部分は (Q,w) のそれぞれの成分の定数倍として働く．つまり

$$\varphi(g,s,t)(Q,w) = (sgQ\,{}^tg, tgw) \quad (g,s,t) \in G \times \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times$$

である[10]．作用している群は異なっているが，ほぼ同じ作用なので，同じ記号 φ を用いて群 $G_1 = G \times \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times$ の作用を表すことにする．

定数 $s > 0$ を掛けることによって対称行列の符号は変わらないが，もし $s < 0$ ならば負定値の対称行列は正定値になるし，符号数 $(1,2)$ の行列は $(2,1)$ になる．したがって最初から Q は正定値，または符号数 $(2,1)$ としてよいが，正定値の場合には 2 次曲線は実数上で考えると空集合になってしまい，あまり意味がないのであった．そこで以下 Q を符号数 $(2,1)$ の不定符号対称行列とし，2 次形式 $Q(\xi)$ と同一視しよう．

§8.3.2 での考察から $G_1 = G \times \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times$ の作用で考えた軌道の代表元は $t \in \mathbb{R}^\times$ を掛けることによって r を 1 に正規化できるので，結局 $\mathbb{O}_{(I_{2,1},e_1)}$, $\mathbb{O}_{(I_{2,1},e_1+e_3)}$, $\mathbb{O}_{(I_{2,1},e_3)}$ の 3 種類しかなく，これらの軌道は互いに異なっていることが分かる．したがって実射影平面内の 2 次曲線と直線の配置は射影変換で移すことによって上の 3 つの場合に帰着されることが分かった．これら 3 つの場合は単位円の場合に具体的に見てみれば分かるように

- 第一の場合 $\mathbb{O}_{(I_{2,1},e_1)}$ は直線が 2 次曲線と 2 点で交わる場合，
- 第二の場合 $\mathbb{O}_{(I_{2,1},e_1+e_3)}$ は直線が 2 次曲線と接する場合，そして
- 第三の場合 $\mathbb{O}_{(I_{2,1},e_3)}$ は直線が 2 次曲線と交わらない場合

に相当している．結局それぞれの場合において，このような 2 次曲線と直線の組同士はすべて射影変換によって互いに移りあうのである．

8.4　円とトーラス

この節では例 8.8 で考えた $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Z}^2$ の作用による不変式を考えたい．$\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Z}^2$ のような群は格子群と呼ばれる．これらの群は，離散的な位相を持ち，群構造も簡単であるが，その作用は一筋縄ではいかない複雑な例を含む．ここでは基本的な例を中心に，ある意味で慣れ親しんだ関数たち，つまり三角関数や楕円関数について軽く述べておこう．これらの例は不変式を理解するのに役に立つと思う．

---

[10] 式 (8.3) とその後の説明で述べたように，実は考えるべき作用は正確には $\widetilde{\varphi}(g,s,t)(Q,w) = (s\,{}^t g^{-1} Q\, g^{-1}, t\,{}^t g^{-1}\, w)$ であった．しかしここでも記号の煩雑さを避けるために ${}^t g^{-1}$ の代わりに g を考えることにする．

8.4.1 円と三角関数

まず手始めに実数直線 $X=\mathbb{R}$ 上の $G=\mathbb{Z}$ の平行移動による作用を考えてみよう．つまり整数 $m\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\varphi(m)x = x+2\pi m \quad (x\in\mathbb{R})$$

によって作用を定義する．ただし，後の都合を考えて作用を 2π だけ引き延ばして考えている．この作用に関する軌道は $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$\mathbb{O}_x = \{x+2\pi m \mid m\in\mathbb{Z}\}$$

である．その代表元は区間 $[0,2\pi)$ から取れ，商空間は単位円周 S^1 であることを例 8.8 で既に述べた．単位円周 S^1 を実平面 $\mathbb{R}^2$ で $x^2+y^2=1$ として実現しておくと，商写像は

$$\rho:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\simeq S^1, \quad \rho(x)=(\cos x,\sin x) \quad (x\in\mathbb{R})$$

で与えられる[11)]．この表示からもよく分かるように $\cos x$, $\sin x$ は $X=\mathbb{R}$ 上の $G=\mathbb{Z}$ 不変な関数である．もちろん $\{\cos nx,\ \sin nx \mid n\in\mathbb{Z}\}$ はすべて G 不変な関数たちであるが，n 倍角公式が成り立つので，これらは基本的な不変式である $\cos x$, $\sin x$ の多項式として表されてしまう．ここにあげた三角関数は解析的であるが，興味深いことに次の定理が成り立つ．

定理 8.18 $f(x)$ を $X=\mathbb{R}$ 上の $G=\mathbb{Z}$ 不変な C^2 級関数とする．このとき $n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} f(x)e^{-inx}\,dx$$

と置くと

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (\text{絶対一様収束級数}) \tag{8.8}$$

が成り立つ．このとき c_n を n 次のフーリエ係数，$f(x)$ を与える級数をフーリエ級数と呼ぶ．

この定理はフーリエ級数定理として知られているが，級数の絶対収束性にこだわらなければ実はもう少し弱い仮定，例えば $f(x)$ が有界変動の連続関数であるという条件の下に成り立つことが知られている ([20], [37] 参照)．

---

11) 商写像では記号 π がよく使われるが，ここでは円周率との混同を避けるため ρ と書くことにする．

定理の証明は上記参考書に譲ることにして，その意味を考えてみよう．$e^{inx} = \cos nx + i\sin nx$ であるから，フーリエ係数の意味はともかく，式 (8.8) は G 不変な関数 $f(x)$ が $\{\cos nx,\ \sin nx \mid n \in \mathbb{Z}\}$ たちの一次結合 (の極限) で表されること，そしてそれらは結局のところ基本的な不変式である $\cos x$, $\sin x$ の多項式として表されることを示している．つまり $\sin x, \cos x$ は G 不変式の生成元なのである．これら生成元を座標とする写像が商写像になるということは不変式が十分にたくさんある，つまり商空間 X/G の点を分離できることを意味している．

やはり証明はしないが面白い公式を 2 つ記しておこう．最初の公式は部分分数展開公式である．

$$\frac{1}{\sin x} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{(-1)^n}{x+n\pi} = \frac{1}{x} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{x^2-n^2\pi^2}.$$

最初の式は対称に和を取ったものの極限であるが，第 2 の式では対称な 2 項を先に加えてから和を取っているので $x \notin \pi\mathbb{Z}$ において絶対収束する．この公式の証明は例えば [32] を参照してほしい．

この展開式の最初の式は特に興味深い．というのはこの式は標語的に書けば

$$\frac{1}{\sin x} = \sum_{n\in G}\varphi(n)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\pi}\right) = \sum_{n\in G}\varphi(n)\left(\frac{\pi}{x(x+\pi)}\right)$$

と表されるからであり，これは要するに関数 $\pi/x(x+\pi)$ の $G = \mathbb{Z}$ の作用にわたる和である．このように考えると G の作用による不変性はほぼ明らかであるが，一般にこのような無限和は収束しない．上記部分分数展開の式では収束級数になるようにうまく関数が選ばれているわけである．

もう 1 つ公式をあげよう．次の式は $\sin x$ の無限乗積展開と呼ばれる ([32])．

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

この式では

$$1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} = \left(1 - \frac{x}{n\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) = \frac{(-1)}{n^2\pi^2}(x-n\pi)(x+n\pi)$$

と書き直してみれば分かるように，今度は

$$\sin x = \prod_{n\in G}\frac{1}{w(n)}\varphi(n)x \quad (w(n) = -n^2\pi^2)$$

の形をしている．収束の問題が生ずるのでこれを (定数) $\times \prod_{n \in G} \varphi(n)x$ と書くことはできないが，部分分数展開の和が積になっただけで，これが不変関数になることは容易に納得できるであろう．

8.4.2　トーラスと楕円関数

この節では複素函数論の知識を準備無しに用いる．複素函数論に慣れていない読者はここを飛ばして次の章に進むとよいだろう．あるいは，証明のうち複素函数論の必要な箇所を飛ばして読んでもよい．

円周の次にトーラスを考えてみよう．例 8.8 ではトーラスを $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ として実現したが，ここでは少し視点を変えて $\mathbb{R}^2$ を複素平面，$\mathbb{Z}^2$ を複素平面上の**格子**で置き換えて考える．そのような格子を複素数 $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ に対して

$$L = L(\omega_1, \omega_2) = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

と置く．ただし ω_1, ω_2 は $\mathbb{R}$ 上一次独立，つまり両者はゼロではなく $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ であるとする．このようなとき，格子は階数が 2 であるという．比 ω_1/ω_2 が実軸上にないとしたが，必要ならば ω_2/ω_1 を代わりに考えることによって $\omega_1/\omega_2 \in \mathfrak{H}$ (上半平面) として一般性を失わない．実際 ω_1, ω_2 を入れ替えても格子 L そのものは変化しないことに注意しよう．そこで以下 $\omega_1/\omega_2 \in \mathfrak{H}$ を仮定する．

格子 L は通常の複素数の和を演算として群になっており $\mathbb{Z}^2$ と自然に同型である．複素数 $\mathbb{C}$ 自身も加法群と考えると L はその部分群であって

$$T = T(\omega_1, \omega_2) = \mathbb{C}/L$$

とおくとこれは位相的にはトーラスであり，同時に加法群でもある．さらにこの場合には $\mathbb{C}$ が複素構造を持っているので自然に T は複素多様体にもなっている．円周の場合と同様に T を不変式によってパラメータ付けすることにより，トーラス T が楕円曲線と呼ばれる曲線に同型であることを示そう．

そこで，複素平面上の L 不変な関数を三角関数の部分分数展開をお手本にして作ってみよう．

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L, \omega \neq 0} \left(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right). \tag{8.9}$$

これをワイエルストラスの $\wp$ 函数と呼ぶ[12]．本来この式は

$$\sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z+\omega)^2} \quad \text{または} \quad \sum_{\omega \in L} \frac{1}{z+\omega}$$

などとしてみたいところであるが，残念ながら両者共に収束しない．$z=0$ における "発散項" ω^{-2} をうまく繰り込むことによって (8.9) 式は $z \notin L$ において絶対広義一様収束しているのである．そのような微妙なバランスで成り立っている式なので，この式から直接 $\wp(z)$ が L 不変であることを確かめるのは簡単ではない．

定理 8.19 $\wp(z)$ は全平面で定義された L 不変な有理型函数であって，その極は L 上にあり，すべて 2 位の極である．

証明 まず $z \notin L$ において $\wp(z)$ の微分を計算してみよう．級数は絶対収束しているから項別微分が許されて

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + \sum_{\omega \in L,\, \omega \neq 0} \frac{-2}{(z+\omega)^3} = -2 \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z+\omega)^3} \tag{8.10}$$

となる．これで $\wp(z)$ が $z \notin L$ において微分可能 (つまり正則) であり，さらに $z=0$ が 2 位の極であることが分かった．

式 (8.10) は素直に (?) そのままの形で絶対収束しており，和の取り方から L 不変であることは明らかだろう．したがって $\wp'(z+\omega) = \wp'(z)$ $(\omega \in L)$ であるが，これは $\wp(z+\omega) - \wp(z)$ が定数であることを意味している．まず $\omega = \omega_1$ のときを考え $\wp(z+\omega_1) - \wp(z) = C$ (定数) と置く．このとき $z = -\omega_1/2$ を代入すると $\wp(\omega_1/2) - \wp(-\omega_1/2) = C$ である．ところが次の補題が成り立つ．

補題 8.20 $\wp(z)$ は偶関数である．つまり $\wp(-z) = \wp(z)$ が成り立つ．

証明 定義式 (8.9) に $-z$ を代入して

$$\begin{aligned}
\wp(-z) &= \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{\omega \in L,\, \omega \neq 0} \left(\frac{1}{(-z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L,\, \omega \neq 0} \left(\frac{1}{(z+(-\omega))^2} - \frac{1}{(-\omega)^2} \right)
\end{aligned}$$

であるが $-L = L$ なのでこの式は結局 $\wp(z)$ に一致する． ∎

---

[12] Weierstrass, Karl (1815–1897)．$\wp$ 函数の $\wp$ はペーとドイツ語読みするのが習慣である．また複素解析函数を表すのに通常の関数とは異なる漢字『函数』を用いたが，これは単に気分の問題である．気にしないでほしい．

この補題より $\wp(-\omega_1/2)=\wp(\omega_1/2)$ であるから $C=0$ であって，$\wp(z+\omega_1)=\wp(z)$ が成り立つ．同様にして $\wp(z+\omega_2)=\wp(z)$ であるが，ω_1, ω_2 は L の生成元であるから，任意の $\omega\in L$ に対して $\wp(z+\omega)=\wp(z)$ である．また $z=0$ は 2 位の極であったからそれを L で移した任意の点 $\omega\in L$ はやはり 2 位の極である． ∎

この証明中で $\wp'(z)$ も計算されたが，もちろんこれも L 不変な有理型函数である．円周の場合に $\sin x$ の微分である $\cos x$ がやはり 2π 周期であったことを思い出そう．円周は三角関数の間の関係式 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ によってその姿を現すのであったが，我々の $\wp$ 函数の場合にはどうなるだろうか? まず

$$g_2=60\sum_{\omega\in L,\,\omega\neq 0}\omega^{-4},\quad g_3=140\sum_{\omega\in L,\,\omega\neq 0}\omega^{-6} \tag{8.11}$$

と置く．両者とも絶対収束級数である．

定理 8.21　$\wp(z)$ および $\wp'(z)$ は次の関係式を満たす．

$$\wp'(z)^2=4\wp(z)^3-g_2\wp(z)-g_3.$$

証明　$L'=L\setminus\{0\}$ と書く．また $\alpha(z)=\sum_{\omega\in L'}(z+\omega)^{-3}$ と置くと，証明すべき式の左辺は (8.10) より

$$\wp'(z)^2/4=(z^{-3}+\alpha(z))^2=\frac{1}{z^6}+\frac{2}{z^3}\alpha(z)+\alpha(z)^2$$

であるが，$z=0$ における主要部は最後の式の第 1 項と第 2 項から得られる．ここで $\alpha(z)$ を項別微分すると

$$\frac{d^k}{dz^k}\alpha(z)=(-3)(-4)\cdots(-2-k)\sum_{\omega\in L'}(z+\omega)^{-3-k}\quad \text{だから}$$

$$\frac{d^k}{dz^k}\alpha(z)\Big|_{z=0}=(-1)^k\frac{(k+2)!}{2}G_{k+3}\quad\Big(G_n=\sum_{\omega\in L'}\omega^{-n}\ \text{と置く}\Big)$$

となる．G_n は n が奇数のときには $\pm$ の項がそれぞれ打ち消し合ってゼロになることに注意しよう．テイラー展開によって

$$\alpha(z)=-3G_4 z-10G_6 z^3+\cdots$$

であるから，$\wp'(z)^2$ の主要部と定数項は

$$\frac{4}{z^6}-\frac{24}{z^2}G_4-80G_6$$

となる．次に証明すべき式の右辺を計算する．

$$\beta(z)=\sum_{\omega\in L'}((z+\omega)^{-2}-\omega^{-2})$$

と置くと

$$\wp(z)^3=(z^{-2}+\beta(z))^3=z^{-6}+3z^{-4}\beta(z)+3z^{-2}\beta(z)^2+\beta(z)^3$$

である．やはり項別微分によって $\beta'(z)=-2\alpha(z)$ であるから

$$\beta(z)=3G_4z^2+5G_6z^4+\cdots$$

である．したがって $4\wp(z)^3$ の主要部と定数項は

$$\frac{4}{z^6}+\frac{36}{z^2}G_4+60G_6$$

となっている．また $g_2=60G_4$, $g_3=140G_6$ より $-g_2\wp(z)-g_3$ の主要部と定数項は $-60G_4z^{-2}-140G_6$ である．以上の計算から，証明すべき式の $F(z)=$ (左辺) $-$ (右辺) の主要部と定数項は消えることが分かる．ところが $\wp(z)$ も $\wp'(z)$ も L 不変であるから，$F(z)$ は原点だけでなく L の点すべてにおいて主要部が消え，そこで正則である．もともと L 以外の点では正則であったから，結局 $F(z)$ は全平面で正則な函数である．一方で $F(z)$ は L 不変であり，ω_1,ω_2 で生成される $\mathbb{C}$ における平行四辺形内の値を繰り返すだけだから全平面で有界である．そのような正則函数は定数しかない (最大値の原理) が，原点では定数項も消えているから，$F(z)=0$ であることが分かる． ∎

円周のときと同じように写像 $R:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^2$ を $R(z)=(\wp(z),\wp'(z))$ で決めれば，この写像は L 不変であり，定理 8.21 よりその像は曲線

$$\mathscr{C}:y^2=4x^3-g_2x-g_3$$

に含まれている．したがって R は商写像 $\mathbb{C}/L\to\mathscr{C}$ を導き，めでたしめでたし，となりそうであるが，そうは問屋が卸さない．問題は $\wp$ 函数の極である．ここでは値が ∞ になっており，通常の意味では写像が定義できない．これを乗り切るためには射影平面を考える必要がある．そこで R を少々修整して

$$E:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^2(\mathbb{C}),\quad E(z)=[\wp(z):\wp'(z):1]\quad(z\notin L)$$

と決めよう[13]．このとき $z\to 0$ の極限を考えると，斉次座標は定数倍しても変

[13] 射影平面は実数上で考えてきたが，ここで始めて複素数上で考える必然性が出てきたことになる．射

わらないから

$$E(z) = [z^3\wp(z) : z^3\wp'(z) : z^3] \to [0 : -2 : 0] = [0 : 1 : 0]$$

であり，射影平面上では $E(0) = [0 : 1 : 0]$ とすればよいことが分かる．このようにすると確かに E は L 不変であって，商写像 $E : \mathbb{C}/L \to \widetilde{\mathscr{C}}$ を導く．ただし $\widetilde{\mathscr{C}}$ は方程式 $zy^2 = 4x^3 - g_2xz^2 - g_3z^3$ で定義される $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ における 3 次曲線である．この曲線は有限の平面，つまり $z = 1$ においては $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ を満たす曲線であって，これを**楕円曲線**と呼ぶ[14]．この写像 $E : T = \mathbb{C}/L \to \widetilde{\mathscr{C}}$ が全単射同型写像になることも示すことができるが，それは方針のみ演習問題の形で記しておくことにする．興味を持った読者は，例えば [5], [12] などを参照してほしい．

以上 (解説していない部分まで含めて) まとめると次の定理が成り立つ．

定理 8.22　楕円曲線 $\widetilde{\mathscr{C}}$ はトーラス $\mathbb{C}/L$ と同型である．特に楕円曲線は群構造を持つ．複素平面上の L 不変な有理型関数は $\wp(z), \wp'(z)$ の有理式として表すことができる．

楕円曲線の群構造については暗号理論への応用もあって有名であるが，例えば [13] をご覧いただきたい．

以下の演習はかなり高度である．だいたいのあらすじが追えれば良いと思う．詳しくは例えば [54, 第 2 章] を参照されたい．

演習 8.23　$f(z)$ を L 不変な有理型函数とする．ω_1, ω_2 によって生成される平行四辺形の周を $\varepsilon \in \mathbb{C}$ だけ平行移動した経路を C_ε と書く．もし C_ε が $f(z)$ の極を通らなければ $\displaystyle\int_{C_\varepsilon} f(z)dz = 0$ であることを示せ．[ヒント] 平行四辺形 C_ε の対辺同士は ω_1 あるいは ω_2 で平行移動したものになっているのでその辺上では $f(z)$ の値は等しい．しかし，複素線積分をするときには方向が逆になっているので互いに打ち消し合う．

演習 8.24　$f(z)$ を L 不変な有理型函数として，前問の記号を用いる．平行

影平面の定義は実数を複素数に置き換えるだけであるから，問題ないであろう．詳しくは次の章からの解説を参考にしてほしい．

[14] 厳密には特異点がないことを要請する必要がある．今の設定では必然的に非特異曲線になることが証明できるが，深入りしない．

四辺形 C_ε 上で $f(z)$ が値 $c\in\mathbb{C}$ を取らなければ，前問より $\displaystyle\int_{C_\varepsilon}\frac{f'(z)}{f(z)-c}dz=0$ が成り立つ．偏角の原理を用いて $\#\{z\in\mathbb{C}\mid z$ は C_ε 内にあり $f(z)=c\}$ は $f(z)$ の C_ε 内の極の個数に等しいことを示せ．ただし極は位数の分だけ重複して数える．また，これを利用して $\wp(z)$ は平行四辺形内で同じ値をちょうど 2 度ずつ取ることを示せ．[ヒント] 偏角の原理によると重複度を込めて数えて $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=$ (零点の個数) − (極の個数) である．$\wp(z)$ に対しては，平行四辺形内では極は 1 つであるが，それは 2 位の極であった．

演習 8.25 前問と $\wp$ 函数が偶関数であることにより，$\wp(z)$ は平行四辺形内では $\wp(z)=\wp(\omega_1+\omega_2-z)$ を満たし，この 2 つの点を区別できない．この 2 つの点ではちょうど $\wp'(z)$ が相異なる値を取り，結局 $(\wp(z),\wp'(z))$ で平行四辺形内の点はすべて分離できることを示せ．これは商写像 E が一対一であることを示す．その像はコンパクト集合の連続像でコンパクト閉集合になっており $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 内の射影多様体である．したがって像は $\widetilde{\mathscr{C}}$ と一致しなければならない．

演習 8.26 複素函数 $\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}$ はリーマン球面上で無限遠点を含む 4 点の分岐点を持ち，そのリーマン面はちょうどトーラスになることを示せ[15]．

演習 8.27 $R(x,y)$ を 2 変数の有理関数とする．このとき積分

$$\int R\Bigl(x,\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}\Bigr)\,dx$$

は $x=\wp(z)$ と置換することによって

$$\int R\Bigl(\wp(z),\wp'(z)\Bigr)\,\wp'(z)\,dz$$

と表されることを示せ．これは有理型関数の積分であり，留数定理などによって積分できる．特に $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}=\wp^{-1}(x)$ (楕円関数の逆関数) は**楕円積分**と呼ばれている．

---

[15] 感じを出すために x ではなく変数に z を用いたが，もちろんこれは $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ と同じものである．

第 IV 部

複素射影空間の幾何学

第9章 射影変換と不変量

ユークリッド合同変換，そして射影平面上の射影変換やアフィン変換を考えるときにはすべて実数を使って考えたが，この章では主に複素数体上で射影空間上の群作用について考えることにする．もちろんこの章に書かれていることの大部分は実数体 $\mathbb{R}$ 上でも適当な修整を施せば成り立つし，何よりも考え方そのものは基本的に同じである．読者は $\mathbb{C}$ の代わりに $\mathbb{R}$ を念頭に置きながら読んでみるとよい．

9.1 射影空間と連比

第 6 章では実射影平面の導入を行った．これを複素数に，そして高次元の場合に一般化しよう．複素数にしても高次元にしても，普段使い慣れていないと尻込みしてしまうかもしれない．しかし，複素数で計算する方が実数で計算するより制約がないのではるかに簡単だし，低次元で込み入った話をするよりも高次元で本質的な話をする方が簡単だ．そして何よりも，自由度の高い高次元から低次元を見下ろす方がものごとの理解が進むこと請け合いである．

まず複素射影空間 $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ を連比の空間として導入しよう．

実射影平面が連比 $[x:y:z]$ の全体であったように，$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ は $(n+1)$ 個の複素数 $z_0, z_1, \ldots, z_n$ の**連比**の空間である． 連比を $[z_0 : z_1 : \ldots : z_n]$ のように書き表すが，同じ “比” を持つようなものを同一視する．つまり

$$[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] = [\alpha z_0 : \alpha z_1 : \ldots : \alpha z_n] \quad (\alpha \in \mathbb{C}^\times)$$

である．また $z_0, \ldots, z_n$ がすべてゼロのときには連比を考えられないとして，この場合を省く．連比の全体 $\mathbb{P}^n$ を n **次元 (複素) 射影空間**と呼ぶ．特に $n = 1$ の

とき $\mathbb{P}^1$ を**射影直線**，$n=2$ のときは $\mathbb{P}^2$ を**射影平面**と呼ぶ[1]．

一般の n に戻ろう．$\mathbb{P}^n$ の点 $p=[z_0:z_1:\ldots:z_n]$ は連比によって決まっていた．このとき $z_0,z_1,\ldots,z_n$ を p の**斉次座標**と呼ぶ．斉次座標は座標とは言うものの p によって一意的には決まらず，定数倍の自由度がある．射影空間で座標を考えるときには，常にこの自由度を心に留めておく必要がある．

さて，通常の複素ベクトル空間の点 ${}^t(z_0,\ldots,z_{n-1})\in\mathbb{C}^n$ に対して連比 $[z_0:\ldots:z_{n-1}:1]\in\mathbb{P}^n$ を対応させることにより，写像 $\iota:\mathbb{C}^n\to\mathbb{P}^n$ が得られる．

演習 9.1 上の写像 $\iota:\mathbb{C}^n\to\mathbb{P}^n$ は単射であることを示せ．これを**包含写像**と呼んで $\iota:\mathbb{C}^n\hookrightarrow\mathbb{P}^n$ と表す．

連比 $z=[z_0:z_1:\ldots:z_n]$ において，もし $z_n\neq 0$ ならば

$$[z_0:z_1:\ldots:z_n]=[z_0/z_n:z_1/z_n:\ldots:z_{n-1}/z_n:1]$$

(各成分に $1/z_n$ を掛けた)

だから，上のように $\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{P}^n$ に埋め込んだとき $z\in\mathbb{C}^n\subset\mathbb{P}^n$ とみなすことができる．これを**有限点**あるいは**通常点**と呼ぶことにしよう．最後の座標 z_n を特別視する理由は数学的にはないが，このように決めておくと $\mathbb{C}^n$ における幾何と $\mathbb{P}^n$ における射影幾何を比較するときに便利である．

一方，最後の成分がゼロならば $w\in\mathbb{P}^n\setminus\mathbb{C}^n$ は

$$w=[w_0:\ldots:w_{n-1}:0]$$

と表すことができる．よく考えると，このような点の全体は自然に $\mathbb{P}^{n-1}$ と同一視される．このように射影空間における有限点以外の点 $\mathbb{P}^n\setminus\mathbb{C}^n$ は，自然に次元が 1 つ低い射影空間を構成しており，これを実射影平面の場合の類似によって**無限遠点**と呼ぶことにする．

補題 9.2 (1) n 次元複素射影空間は，有限点の全体からなる n 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ と無限遠点からなる $(n-1)$ 次元射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}$ の和である．

$$\mathbb{P}^n=\mathbb{C}^n\cup\mathbb{P}^{n-1}$$

(2) $\mathbb{P}^n$ の任意の点は $\mathbb{C}^n$ と同型な近傍を持つ．

---

[1] これらは複素数で考えているので，例えば $\mathbb{P}^1$ は複素 1 次元であるが，実 2 次元である．したがって実多様体と考えるならば複素射影直線は 2 次元の曲面である．

証明　(1) は既に示したので (2) を示す．$\mathbb{P}^n$ の任意の点 $[z_0 : z_1 : \ldots : z_n]$ を取ると，すべての座標がゼロということはないから，例えば $z_j \neq 0$ とすれば，連比は

$$[z_0 : \ldots : z_j : \ldots : z_n] = [z_0/z_j : \ldots : 1 : \ldots : z_n/z_j]$$

と表すことができる．ここで第 j 座標は $z_j/z_j = 1$ である．したがって，この点の近傍として

$$U_j = \{[w_0 : \ldots : 1 : \ldots : w_n] \mid {}^t(w_0, \ldots, \widehat{w_j}, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n\} \tag{9.1}$$

を考えれば[2] これは $\mathbb{C}^n$ と同型な開集合である．集合 U_j が $\mathbb{C}^n$ と全単射によって対応していることは明らかであるが，$\mathbb{P}^n$ の位相を，これらの集合 $U_0, \ldots, U_{n+1}$ および各 $U_j \simeq \mathbb{C}^n$ の通常の位相における開集合より生成されるような位相とすると，その定義により U_j は $\mathbb{C}^n$ と同相であって，しかも開集合である．　■

定義 9.3　上の補題の証明に現れた $\mathbb{C}^n$ と同型な開集合 U_j を $\mathbb{P}^n$ の**基本アフィン開集合**と呼ぶ．

9.2　射影

射影空間の名前は元来“空間を射影したもの”という意味からきたものである．連比のほうがイメージが湧きやすいので先に連比の空間として $\mathbb{P}^n$ を導入したが，ここでは複素ベクトル空間の射影として $\mathbb{P}^n$ を考えておこう．こう考えることにより，射影変換が自然に定義できるようになる．

$V = \mathbb{C}^{n+1}$ に対して，全空間からゼロベクトルのみを除いた部分集合を $V' = V \setminus \{0\}$ と書こう．V' から $\mathbb{P}^n$ への写像を

$$\pi : V' \to \mathbb{P}^n, \quad \pi(v) = [v] = [z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \qquad \text{ただし } v = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \tag{9.2}$$

と決める．このとき，π の逆像 $\pi^{-1}([z_0 : \ldots : z_n])$ を考えれば，

$$\pi^{-1}([z_0 : \ldots : z_n]) = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{C}^\times\} \simeq \mathbb{C}^\times$$

となっている．$\mathbb{P}^n$ の定義より明らかに π は全射である．

---

[2] この式において $\widehat{w_j}$ はその部分を省くことを意味している．したがって，$w_0, \ldots, \widehat{w_j}, \ldots, w_n$ は j 番目が抜けているのでちょうど n 個の座標成分を表す．

以上を逆に考えれば，**1 次元トーラス群** $\mathbb{C}^\times$ が V' にスカラーの掛け算によって自然に作用しており，その軌道の全体 $\{\mathbb{C}^\times v \mid v \in V'\}$ が $\mathbb{P}^n$ と同一視される．つまり $\mathbb{P}^n \simeq V'/\mathbb{C}^\times$ と書くことができるだろう．

定義 9.4 (射影空間の再定義) $\mathbb{C}^\times$ がベクトル空間にスカラー倍で作用しているとき，商空間 $(V \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$ を**射影空間**と呼び，$\mathbb{P}(V)$ で表す．$V = \mathbb{C}^{n+1}$ のとき，$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n$ と表す．$\mathbb{P}(V)$ には商多様体の構造を入れて，自然に複素多様体とみなすことができる．

射影空間を $\mathbb{P}^n$ と表したとき，n は多様体の次元を表すことに注意しよう．一方 $\mathbb{P}(V)$ と書いたときには，ベクトル空間 V の次元は $(n+1)$ である．V への $\mathbb{C}^\times$ の作用を考えたとき，1 次元の群 $\mathbb{C}^\times$ による商を取るから，次元は 1 つ落ちて n 次元になる．

1 次元トーラス群 $\mathbb{C}^\times$ のベクトル空間 V への作用において，$\{0\}$ 以外の軌道はすべて $\mathbb{C}^\times$ と同相で，$\{0\}$ は 1 点のみで軌道をなしている．このように $\{0\}$ は群の作用という観点から見ても非常に特殊な点であることが分かる．さらに $\{0\}$ は他の任意の軌道の閉包に含まれることに注意しよう．このような事情のために，ゼロベクトルを含むベクトル空間 V の商空間 $V/\mathbb{C}^\times$ はハウスドルフ空間[3] ではなくなってしまう．このような例は実数体の場合ではあるが，既に例 7.31 でも考えた．一方，零軌道を除いてから商を取った $\mathbb{P}(V)$ はハウスドルフであって多様体となる．

演習 9.5 商空間には商位相が入るが，前節で定義した基本アフィン開集合 $U_j \subset \mathbb{P}^n$ は商位相の意味で開集合であることを示せ．

n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ において，例えば相異なる 2 点 $[a], [b]$ $(a, b \in V)$ を含む最小の射影部分空間はどうなるであろうか? ベクトル空間 V に引き戻して考えると，これは原点を通る直線 $\mathbb{C}a$ と $\mathbb{C}b$ を含むような最小のベクトル空間 $W_{a,b}$ を考えることとほぼ同じである．ベクトル空間 $W_{a,b}$ は a, b によって**生成された部分空間**とも呼ばれ

---

[3] Hausdorff, Felix (1868–1942). 位相空間 X が**ハウスドルフ空間**であるとは，X の相異なる 2 点 $a, b \in X$ に対して，a の近傍 U_a と b の近傍 U_b が存在して，$U_a \cap U_b = \varnothing$ となるときに言う．このようなとき 2 点 a, b は開集合によって分離されると言うが，その結果ハウスドルフ空間では 1 点のみからなる集合 $\{a\}$ は閉集合になる．

$$W_{a,b} = \{sa + tb \mid s, t \in \mathbb{C}\}$$

と表すことができる．2 点 $[a], [b]$ は相異なる射影空間内の点なのでベクトル a, b は平行ではなく，一次独立である．したがって $W_{a,b} \simeq \mathbb{C}^2$ であり，これを射影化して考えると

$$\mathbb{P}(W_{a,b}) \simeq \mathbb{P}^1 \tag{9.3}$$

となって射影直線と同型である．そこで，この空間 $\mathbb{P}(W_{a,b})$ を $L_{a,b}$ とも書いて，2 点 $[a], [b]$ を結ぶ**射影直線**と呼ぶ．射影直線を単に直線と言うこともある．

一般に k 点 $[a_1], \ldots, [a_k] \in \mathbb{P}^n$ が与えられたとき，これらを含む最小の射影空間は

$$\mathbb{P}(W), \quad W = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} s_i a_i \,\middle|\, s_i \in \mathbb{C} \right\} \tag{9.4}$$

で与えられる．これを $[a_1], \ldots, [a_k]$ によって生成された**射影部分空間**，あるいは単に部分空間と呼ぶ．k 点に対応するベクトル $\{a_1, \ldots, a_k\}$ が V において一次独立ならば，点 $[a_1], \ldots, [a_k]$ は**一般の位置**にあるといい，このとき式 (9.4) において $\mathbb{P}(W) \simeq \mathbb{P}^{k-1}$ である．特に $k = 2$ のときが 2 点を通る射影直線だが，一般の位置にある 3 点が生成する部分空間を**射影平面**と呼ぶ．

9.3　射影変換

射影空間の自己同型として射影変換を考えることができる．

$g \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ は $V = \mathbb{C}^{n+1}$ に線型変換として作用するが，この作用は $\mathbb{C}^\times$ のスカラー倍による作用と可換である[4)]．したがって g の $\mathbb{P}(V)$ への作用を

$$\pi_g([v]) = [g \cdot v] \quad ([v] \in \mathbb{P}(V),\ v \in V) \tag{9.5}$$

で定めることができる．ここで $g \cdot v$ は行列 g と列ベクトル ($(n+1) \times 1$ 行列) の積，π_g は射影空間 $\mathbb{P}(V)$ の自己同型写像を表している．g の引き起こす $\mathbb{P}^n$ 上の変換 π_g を**射影変換**と呼ぶ．

注意 9.6　$\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ に属する異なる 2 つの行列 g, h は同じ射影変換を定めることがある．その条件は $gh^{-1} \in \mathbb{C}^\times$ がスカラー行列になることである．そこで**射影一般線型群**を $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$ で定めると，　この群は $\mathbb{P}^n$

---

4) $\mathbb{C}^\times$ を $\mathbb{C}^\times \cdot 1_{n+1}$ と同一視して $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ の中心と思うこともできる．

上の射影変換のなす群とちょうど同一視できる (同型である).

例 9.7　射影平面 $\mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{P}^1$ を考える．このとき，複素平面 $\mathbb{C}^2$ が自然に $\mathbb{P}^2$ の中に連比 $[x:y:1]$ として入っている．射影変換 π_g $(g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}))$ であって複素平面を保つような変換を考えると，それは

$$g = \begin{pmatrix} h & v \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}),\ v \in \mathbb{C}^2,\ d \in \mathbb{C}^\times \tag{9.6}$$

という形をしていることが次のようにして確かめられる．複素平面 (通常平面) を保つということはその補集合である無限遠直線 $\{[x:y:0] \mid x:y] \in \mathbb{P}^1\} \simeq \mathbb{P}^1$ を保つと言ってもよい．とくに無限遠点 $e_1 = {}^t(1,0,0)$ および $e_2 = {}^t(0,1,0)$ は g によってやはり無限遠点に写る．つまり

$$ge_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ge_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．行列 g の第 1 列は ge_1 であり，第 2 列は ge_2 であるから，結局 g は (9.6) 式のように書けていることになる．

射影変換と考えるときには，上の注意を考慮して対角成分をゼロでない定数倍しても構わないから，射影変換として複素平面を安定にする (つまり複素平面を複素平面に写す) ようなものの全体として

$$A_2(\mathbb{C}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} h & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), v \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

を取ることができる．これを**アフィン変換群**と呼ぶ．

9.4　一次分数変換

1 次元の射影空間 $\mathbb{P}^1$ を射影直線と呼ぶのであった．ここでは射影直線上の射影変換がどのようになるかを見てみることにしよう．まず，繰り返しになるが

$$\mathbb{P}^1 = \{[z_0 : z_1] \mid (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\} = \{[z:1] \mid z \in \mathbb{C}\} \cup \{[1:0]\}$$

のように分解して $\{[z:1] \mid z \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}$ とみなし，$[1:0]$ を**無限遠点**と呼んで $\infty = [1:0]$ と表すことにしよう． 射影変換は

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \text{ に対して } \pi_g([z_0 : z_1]) = [az_0 + bz_1 : cz_0 + dz_1]$$

で与えられる．ここでもし $z_1 \neq 0,\, cz_0 + dz_1 \neq 0$ ならば

$$[az_0 + bz_1 : cz_0 + dz_1] = \left[\frac{az_0 + bz_1}{cz_0 + dz_1} : 1\right] = \left[\frac{a(z_0/z_1) + b}{c(z_0/z_1) + d} : 1\right]$$

であるから，$\mathbb{C} \ni z \leftrightarrow [z:1] \in \mathbb{P}^1$ という対応によって $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ は

$$\pi_g(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & cz+d \neq 0 \\ \infty & cz+d = 0 \end{cases} \quad ; \quad \pi_g(\infty) = \begin{cases} a/c & c \neq 0 \\ \infty & c = 0 \end{cases} \tag{9.7}$$

として $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$ に作用することが分かる．式 (9.7) の形に実現された射影変換を**一次分数変換**と呼ぶ．

一次分数変換は複素 1 次元の多様体への作用で，式 (9.7) のように有理式で表されることもあってそれほど難しくないように思われるかも知れない．しかし，実多様体と思うとこれは 2 次元の平面であり，複素射影変換群も実数上で考えると 6 次元の群であって，その作用は考える以上に複雑である．ここでは 1 つの例をあげてその作用の複雑さの一端を見てみよう．

例 9.8　複素平面において実軸より“上”の部分，複素上半平面を考えてみよう (§1.5.4 参照)．上半平面を記号で

$$\mathfrak{H} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\, y > 0\}$$

と表すのであった．既に射影平面内の $\mathbb{C}^2$ を保つような $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ の部分群がアフィン変換群であることを見た．では，この上半平面 $\mathfrak{H}$ を保つような $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の部分群は何であろうか?

もし $g \in G$ の作用が $\mathfrak{H}$ を保つならば，その境界もまた g で保たれる．この場合，境界は実軸と ∞ を合わせたもの，つまり実射影直線である．そこで，いつものように

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

と書いておいて，複素平面内の実射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ がどのように写るのかを考えてみるのがよいだろう．しかし，今はとにかくそのうちの 3 点 $\infty, 0, 1$ が π_g によってどのように写るかを見ておきたい．簡単のために $c, d, c+d \neq 0$ の場合を考える．このとき，一次分数変換 π_g によって 3 点は

$$\infty \mapsto \frac{a}{c}, \quad 0 \mapsto \frac{b}{d}, \quad 1 \mapsto \frac{a+b}{c+d} \in \mathbb{R}$$

に写るが，これらはすべて実数である．そこで $a/c = \lambda$, $b/d = \mu$, $(a+b)/(c+d) = \nu$ $(\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R})$ と置くと，

$$\nu = \frac{a+b}{c+d} = \frac{\lambda c + \mu d}{c+d}, \quad \therefore \quad (\lambda - \nu)c = (\nu - \mu)d$$

である．$c, d \neq 0$ としたので，最後の式は $\lambda = \mu = \nu$ または $d/c \in \mathbb{R}$ を意味する．ところが $\lambda = \mu = \nu$ のときには $\det g = 0$ となり，g が正則行列であることに反するから，結局 $d/c = \kappa$ は実数でなければならない．したがって

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda c & \mu d \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \lambda & \mu\kappa \\ 1 & \kappa \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{\times} \cdot \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

となることが分かる．一方，行列 g が表す射影変換はスカラー倍を除いて決まるので

$$\pi_g = \pi_{g'}, \quad g' = \begin{pmatrix} \lambda & \mu\kappa \\ 1 & \kappa \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

となって，上半平面 $\mathfrak{H}$ を保つ一次分数変換は結局のところ実行列 g' によって与えられることが分かった．そこで最初から定数倍して $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, つまり $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ として一般性を失わない．このとき $z = x + iy \in \mathfrak{H}$ の π_g による像の虚部は

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,\pi_g(z) &= \mathrm{Im}\,\frac{az+b}{cz+d} = \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \overline{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\frac{(az+b)(c\overline{z}+d) - (a\overline{z}+b)(cz+d)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{1}{2i}\frac{(\det g)(z-\overline{z})}{|cz+d|^2} = \frac{\det g}{|cz+d|^2}\,\mathrm{Im}\,z \end{aligned}$$

となる．したがって $\det g > 0$ ならば $\mathrm{Im}\,\pi_g(z) > 0$ である．一方 $\det g < 0$ ならば $\mathrm{Im}\,\pi_g(z) < 0$ であって，$\pi_g(z)$ は上半平面でなく“下”半平面に属していることになる．つまりこのとき射影変換 π_g は上半平面と下半平面を入れ替え，実軸を保つような変換になっているわけである．

もし $\det g > 0$ なら g の代わりに $(\sqrt{\det g})^{-1} g$ を考えても射影変換は変わらない．このとき $\det((\sqrt{\det g})^{-1} g) = 1$ であって，これは実特殊線型群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の元である．以上をまとめると次の定理を得る．

定理 9.9 $\mathbb{P}^1$ 上の一次分数変換 (射影変換) のうち上半平面 $\mathfrak{H}$ を保つものは

$g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ によって π_g と書くことができる.

このようにして $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の作用が上半平面 $\mathfrak{H}$ を保つことが分かったが，この作用は推移的である.

定理 9.10　$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の一次分数変換による上半平面 $\mathfrak{H}$ への作用は推移的であって，上半平面は等質空間として $\mathfrak{H} \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ と表される.

証明　まず $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathfrak{H}$ への作用が推移的であることを示そう．それには $i \in \mathfrak{H}$ を一次分数変換によって $\mathfrak{H}$ のどの点にでも写せることを示せば十分である．まず $a_t = \mathrm{diag}(e^t, e^{-t})$ $(t \in \mathbb{R})$ によって i を写すと，$\pi_{a_t}(i) = e^{2t}i$ であるから，これは虚軸上の正の部分すべてを動く．次に $n_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考えると $\pi_{n_x}(e^{2t}i) = x + e^{2t}i$ なので，これは上半平面上の任意の点を表す．このようにして $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の元 a_t, n_x による一次分数変換によって i は上半平面上の任意の点に写すことができる.

次に $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の中で i を固定する部分群を求めよう．そこで $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ と置き，一次分数変換 π_g が i を固定すると仮定すると

$$\pi_g(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = i \Longleftrightarrow ai+b = i(ci+d)$$

$$\Longleftrightarrow a = d,\ b = -c$$

となることが分かる．これより $g = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ であるが，行列式が 1 なので $a^2 + c^2 = 1$ でなければならない．したがって (a,c) は単位円周上の点であるから $(a,c) = (\cos\theta, \sin\theta)$ と置くことができ，

$$g = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$$

であることが分かる．以上より，$\mathfrak{H}$ は等質空間として $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ と同型である. ∎

実特殊線型群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は実多様体であるが，等質空間 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{H}$ は複素平面内の開集合として複素解析的多様体である．このような複素構造を持つ部分多様体を不変にするような部分群が実リー群になっていることは驚くべきことと言ってもよい．実際，実数体上で定義された行列群の等質空間が複

素多様体になるのはめずらしく，上半平面のような等質空間を**エルミート対称空間**[5] と呼んでいる．

演習 9.11　上半平面をエルミート対称空間と呼ぶのは，位数 2 の複素解析的な自己同型 $\theta : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, $\theta(z) = -z^{-1}$ を上半平面が持っているからである．この自己同型 θ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の自己同型 $g \mapsto {}^t g^{-1}$ より誘導されていることを示せ．

[ヒント] 任意の点 $z \in \mathfrak{H}$ は $z = \pi_g(i)$ と書けているから，$\pi_{{}^t g^{-1}}(i) = -(\pi_g(i))^{-1}$ を示せばよい．

9.5　複比

$\mathbb{P}^1$ 上の相異なる 4 点 $p_i = [v_i]$ $(1 \le i \le 4)$ を取る．ここで $p = [v]$ と書くと，$p \in \mathbb{P}^1$ は射影直線上の点で $v \in \mathbb{C}^2$ は 2 次元ベクトルを表している．またベクトル $v \neq 0$ を $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と成分表示すると $p = [a : b]$ のように斉次座標 (連比) を用いて表すことができる．2 つのベクトル

$$v_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, \quad v_j = \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} \quad (i \neq j)$$

を並べた 2 次の正方行列を

$$(v_i, v_j) = \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$$

のように表し，その行列式を $D_{ij} = \det(v_i, v_j) = a_i b_j - a_j b_i$ と書く．$[v_i] \neq [v_j]$ なので v_i, v_j は平行ではなく $D_{ij} \neq 0$ である．

定義 9.12　$\mathbb{P}^1$ 上の相異なる 4 点 $p_i = [v_i]$ $(1 \le i \le 4)$ に対して**複比** $\mathrm{cr}(p_1, p_2; p_3, p_4)$ を

$$\mathrm{cr}(p_1, p_2; p_3, p_4) = \frac{D_{13} D_{24}}{D_{14} D_{23}} \tag{9.8}$$

と定義する[6]．ただし $D_{ij} = \det(v_i, v_j)$ である．

この定義において式 (9.8) の右辺は $p_1, \ldots, p_4$ の斉次座標を用いて表されているので，定義が射影平面上の点に対して定まるためには右辺が斉次座標の取り

---

[5] Hermite, Charles (1822–1901).

[6] 複素平面上の複比の定義と異なっているのが気になる読者もいるかも知れない．しかし，この定義は複素平面上の点 $z \in \mathbb{C}$ を $[z : 1] \in \mathbb{P}^1$ とみなせば古典的な定義と一致している．式 (9.12) 参照．

方に依らないことを示す必要がある．そこで，例えば $p_1=[v_1]$ の斉次座標を v_1 から λv_1 $(\lambda\in\mathbb{C}^\times)$ に取り替えたとしてみよう．すると D_{13} および D_{14} は共に λ 倍されるが，この 2 つの行列式は右辺の分母・分子に 1 度づつ現れているのでちょうど λ は約分され，もとの式と同じである (このとき D_{24}, D_{23} は変化していないことに注意する)．このようにして，どの点の斉次座標を取り替えても右辺は変化せず，確かに射影平面上の 4 点に対して値が定まっていることが確かめられた．

複比の最初の重要な性質は射影変換による不変性である．

定理 9.13　複比は射影変換によって不変である．

証明　$\mathbb{P}^1$ 上の相異なる 4 点 $p_i=[v_i]$ $(1\le i\le 4)$ を取る．ただし $v_i\in\mathbb{C}^2$ は斉次座標である．$g\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ による射影変換を π_g とすると，$\pi_g(p_i)=\pi_g([v_i])=[g\cdot v_i]$ である．一方

$$D^g_{ij}:=\det(gv_i,gv_j)=(\det g)\cdot D_{ij}$$

だから

$$\begin{aligned}&\mathrm{cr}\big(\pi_g(p_1),\pi_g(p_2);\pi_g(p_3),\pi_g(p_4)\big)\\&=\frac{D^g_{13}D^g_{24}}{D^g_{14}D^g_{23}}=\frac{D_{13}D_{24}}{D_{14}D_{23}}=\mathrm{cr}\big(p_1,p_2;p_3,p_4\big)\end{aligned}$$

が成り立つ．■

直交群は距離を不変にし，逆に距離を不変にするような線型変換は直交群の元であった．このように，しばしば不変式あるいは不変式が導く幾何学は変換群そのものを規定する．複比と射影変換群の間の関係は直交群と距離の関係よりもっと密接であって，次の定理が成り立つ．

定理 9.14　射影直線上の変換 (単なる全単射写像) であって，複比を不変にするようなものは一次分数変換である．

証明　$f:\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ を複比を不変にするような任意の全単射写像とし，

$$f(p_2)=[1:1],\quad f(p_3)=[1:0]=\infty,\quad f(p_4)=[0:1]$$

となるような点 p_2,p_3,p_4 を取ろう．仮定より f は全単射なので，このような点は一意に存在する．このとき p_1 および $f(p_1)$ の斉次座標による表示をそれぞれ $p_1=[z_0:z_1], f(p_1)=[w_0:w_1]$ と書こう．このとき

$$\mathrm{cr}(f(p_1), f(p_2); f(p_3), f(p_4)) = \frac{\begin{vmatrix} w_0 & 1 \\ w_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} w_0 & 0 \\ w_1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(-w_1)\cdot 1}{w_0 \cdot (-1)} = \frac{w_1}{w_0}$$

である．仮定より複比は f で不変であるから，この式は $\mathrm{cr}(p_1, p_2; p_3, p_4) = \dfrac{D_{13}D_{24}}{D_{14}D_{23}}$ に等しい．それぞれの比の値を連比の形に書き直すと

$$\begin{aligned} f(p_1) &= [w_0 : w_1] = [D_{14}D_{23} : D_{13}D_{24}] \\ &= [z_0, z_1 \text{ の斉次 1 次式} : z_0, z_1 \text{ の斉次 1 次式}] \end{aligned}$$

となっている．したがってこれは射影変換である． ■

複比は射影変換で不変であって，複比を不変にするような変換は射影変換である．これは確かに美しい．しかし，我々は複比を斉次座標と行列式を用いて天下り的に与えた．この複比の形はいったいどこから出てきたのだろうか? それを解き明かしてくれるのが次の定理である．

定理 9.15 射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の射影変換について次が成り立つ．

(1) 射影直線上の相異なる 3 点 p_1, p_2, p_3 を任意に取ると，この 3 点をそれぞれ $\infty = [1:0], 0 = [0:1], 1 = [1:1]$ に写すような射影変換が存在する．

(2) 射影直線上の相異なる 3 点を，任意に選んだ相異なる 3 点に移すような射影変換が唯一つ存在する．

(3) 射影直線上の 2 組の相異なる 4 点が射影変換によって互いに写りあうための必要十分条件はそれらの複比が等しいことである．

証明 これらの主張はすべて同根なのでまとめて証明しよう．そこで (3) の主張にある 4 点 $p_1, \ldots, p_4 \in \mathbb{P}^1$ を考えることにする．既に何度も表しているように $p_i = [v_i]$ ($v_i \in \mathbb{C}^2$) を斉次座標による表示とする．射影平面上の 4 点の代わりに 4 つのベクトルを並べた行列

$$A = (v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

を以下考える．このとき $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を A に左から掛けると

$$gA = (gv_1, gv_2, gv_3, gv_4)$$

だから，これはちょうど射影変換 π_g を 4 点すべてに施すことにあたる．いま 2

次の正方行列 (v_1, v_2) を取ると，仮定より v_1 と v_2 は平行ではないから，この行列は正則行列である．そこで $g_1 = (v_1, v_2)^{-1}$ と置く．すると

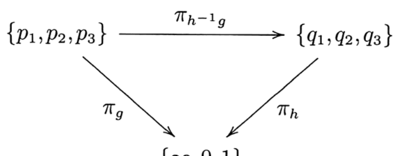
$$g_1 A = (v_1, v_2)^{-1}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_3' & a_4' \\ 0 & 1 & b_3' & b_4' \end{pmatrix} \tag{9.9}$$

である．ここで $a_3', b_3' \neq 0$ であることに注意する．実際，例えば $a_3' = 0$ ならば対応する $\mathbb{P}^1$ 上の点は $[a_3' : b_3'] = [0 : b_3'] = [0 : 1]$ だから $[0 : 1]$ と一致してしまい，相異なる 4 点を取った仮定に反する．そこで $g_2 = \mathrm{diag}(a_3', b_3')^{-1}$ と置くと

$$g_2 g_1 A = \begin{pmatrix} a_1'' & 0 & 1 & a_4'' \\ 0 & b_2'' & 1 & b_4'' \end{pmatrix} \tag{9.10}$$

となるが，このとき，最後に得られた行列を $B = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ と置くと $[u_1] = [1 : 0] = \infty$, $[u_2] = [0 : 1] = 0$, $[u_3] = [1 : 1] = 1$ である．最初に取った点 p_1, p_2, p_3 はこのようにして射影変換 π_g $(g = g_2 g_1)$ によって $\infty, 0, 1$ に写すことができ，これで (1) を示すことができた．

もう一組の相異なる 3 点 $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{P}^1$ を取ると，これらはやはり射影変換 π_h $(h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))$ によって $\infty, 0, 1$ に写すことができる．したがって $\pi_g(p_i) = \pi_h(q_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ が成り立つが，このとき $\pi_{h^{-1}g}(p_i) = q_i$ であって，このようにして 3 点同士は射影変換によって互いに写りあうことが分かる．これで (2) の前半が示された．あとはこのような射影変換が唯一つであることを示せばよい．



まず p_1, p_2, p_3 を全く動かさないような射影変換は恒等変換であることを示そう．この射影変換を π_k $(k \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))$ と表す．このとき $\pi_g \circ \pi_k \circ \pi_{g^{-1}} = \pi_{gkg^{-1}}$ は $\infty, 0, 1$ を動かさない射影変換である．そこで

$$gkg^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と書いておくと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

だが $\infty=[1:0]$ は ∞ に写るので $c=0$ でなければならない．同様にして $0=[0:1]$ が 0 に写るから $b=0$ が分かる．最後に $1=[1:1]$ がどう写るかを見てみると

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$$

だから，これが $1=[1:1]$ の斉次座標であるためには $a=d$ でなければならない．したがって $gkg^{-1}=a1_2$ はスカラー行列であるが，これより $k=ag^{-1}1_2g=a1_2$ となり，k もスカラーであることが分かる．したがって π_k は恒等変換である．

さて，3 点 p_1,p_2,p_3 を q_1,q_2,q_3 に写すような射影変換が 2 つあったとしてそれを π_1,π_2 とすると，$\pi_1^{-1}\circ\pi_2$ は p_1,p_2,p_3 を固定する．したがって上に示したことから恒等変換である．これより $\pi_1=\pi_2$ が従う．つまりそのような射影変換は唯一つである．

最後に (3) を示そう．そのために式 (9.10) の右辺の行列 B の第 4 列を具体的に計算してみよう．まず

$$(v_1,v_2)^{-1}=\frac{1}{D_{12}}\begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

なので式 (9.9) の右辺の行列の第 3 列目は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_3' \\ b_3' \end{pmatrix}&=\frac{1}{D_{12}}\begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{D_{12}}\begin{pmatrix} b_2a_3-a_2b_3 \\ -b_1a_3+a_1b_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{D_{12}}\begin{pmatrix} -D_{23} \\ D_{13} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である．同様にして第 4 列目は

$$\begin{pmatrix} a_4' \\ b_4' \end{pmatrix}=\frac{1}{D_{12}}\begin{pmatrix} -D_{24} \\ D_{14} \end{pmatrix}$$

となる．したがって行列 B の第 4 列は

$$\begin{pmatrix} a_4'' \\ b_4'' \end{pmatrix}=g_2\begin{pmatrix} a_4' \\ b_4' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a_3')^{-1}a_4' \\ (b_3')^{-1}b_4' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_{24}/D_{23} \\ D_{14}/D_{13} \end{pmatrix}$$

であり，結局 $\pi_g(p_4)=[D_{24}/D_{23}:D_{14}/D_{13}]$ であることが分かる．この連比の値は

$$\lambda=\frac{D_{24}/D_{23}}{D_{14}/D_{13}}=\frac{D_{13}D_{24}}{D_{14}D_{23}} \tag{9.11}$$

であって，これは複比 $\mathrm{cr}(p_1,p_2;p_3,p_4)$ に他ならない．

以上で任意の相異なる 4 点 p_1, p_2, p_3, p_4 に対して，ある射影変換 π_g であって $\pi_g(p_1)=\infty, \pi_g(p_2)=0, \pi_g(p_3)=1, \pi_g(p_4)=[\lambda:1]$ となるものが存在することが分かった．ここで $\lambda=\mathrm{cr}(p_1,p_2;p_3,p_4)$ は複比である．別の 4 点 $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}^1$ を取ると同じようにしてこれを $\infty, 0, 1, [\mu:1]$ に写す射影変換 π_h が存在する．ここで $\mu=\mathrm{cr}(q_1,q_2;q_3,q_4)$ である．

もし $\lambda=\mu$ なら $\pi_{h^{-1}g}$ を考えるとこれは $p_i\ (i=1,\ldots,4)$ を q_i に写す．逆に射影変換で p_i を q_i に写すものがあったとすると，複比は射影変換によって変わらないので $\lambda=\mu$ でなければならない． ∎

この証明を眺めれば，$\mathbb{P}^1$ 上の 4 点配置の射影変換による標準形を考えることにより複比の定義式が自然に導出されていることに気がつくであろう．要するに複比は現れるべくして現れた式だということである．

自然数 k に対して X_k を射影直線 $\mathbb{P}^1$ の k 個の直積のうち成分が相異なるものの集合としよう．

$$X_k=\{(p_1,p_2,\ldots,p_k)\in(\mathbb{P}^1)^k \mid p_i\neq p_j\ \ (i\neq j)\}.$$

定理 9.15 によって射影変換群 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ は X_3 に推移的に働き，さらに 1 点の固定部分群は自明であることが分かる．したがって $X_3\simeq\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ (多様体としての同型) である．一方 X_4 への $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ の作用は推移的ではなく，点 $x=(p_1,p_2,p_3,p_4)$ を通る軌道は複比が等しいような 4 点の組の集まり

$$\mathbb{O}_x=\{(q_1,q_2,q_3,q_4)\in X_4 \mid \mathrm{cr}(q_1,q_2;q_3,q_4)=\mathrm{cr}(p_1,p_2;p_3,p_4)\}$$

である．つまり複比は不変式環 $C(X_4)^{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})}$ に属する不変式で，この不変式によってすべての軌道が分離されるのである．

演習 9.16　X_1 と X_2 について同様の考察をせよ．また X_5 について考えよ．

演習 9.17　$n\geq 1$ を整数とする．射影空間 $\mathbb{P}^n$ 内の相異なる任意の $(n+2)$ 個の点を別の $(n+2)$ 個の点に写す射影変換が存在することを示せ．$(n+3)$ 点の複比はどのように定義すればよいだろうか?

9.6 円と複比

この節では複比と古典的な平面幾何との関係を述べておこう．そこで，しばらくの間は射影直線でなく複素平面 $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$ で考えることにする．

複素平面上に 4 点 $z_1, \ldots, z_4 \in \mathbb{C}$ を取る．これを射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の点とみなすときには $p_i = [z_i : 1]$ $(1 \leq i \leq 4)$ と表されるのであった．定義 9.12 で定義された複比をこの場合に書いてみると，例えば

$$D_{12} = \det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = z_1 - z_2$$

であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{cr}(p_1, p_2; p_3, p_4) &= \frac{D_{13}D_{24}}{D_{14}D_{23}} \\ &= \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} = \frac{(z_1 - z_3)}{(z_1 - z_4)} \Big/ \frac{(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_4)}\end{aligned}$$

と表される．そこで，複素平面上の点に対しては一々射影平面に移行することなく複比を

$$\mathrm{cr}(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)}{(z_1 - z_4)} \Big/ \frac{(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_4)} \tag{9.12}$$

と書き表すことにしよう．これは古典的な複比の定義と一致している．

式 (9.12) の右辺の分子 $(z_1 - z_3)/(z_1 - z_4) = (z_3 - z_1)/(z_4 - z_1)$ が何を表すかを考えてみると，まず $z_3 - z_1$ は点 z_1 から z_3 へ向かう平面上のベクトルを表す複素数である．同様にして $z_4 - z_1$ も考えると，複素数 $(z_3 - z_1)/(z_4 - z_1)$ は偏角が $\theta = \angle z_3 z_1 z_4$ の複素数を表す．同様にして分母は偏角が $\varphi = \angle z_3 z_2 z_4$ の複素数である．したがって複比 $\mathrm{cr}(z_1, z_2; z_3, z_4)$ の偏角は $\theta - \varphi$ である．もっとも，4 点の配置の仕方によって角度をどの方向に測るかを考えなければならないので注意が必要である (図 9.1).

定理 9.18 複素平面上の相異なる 4 点が同一円周上にあればその複比は実数である．

証明 まず 4 点が同一円周上にあるとする．すると上の考察から θ と φ は円弧 $z_3 z_4$ の上に立つ円周角である．ただし z_3, z_4 が分ける円弧は 2 つあることに注意しよう．もし z_1, z_2 が同じ円弧上にあれば，円周角の定理より $\theta = \varphi$ で

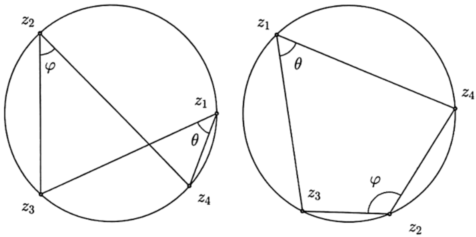


図 9.1　4 角形と偏角

あって，複比 $\mathrm{cr}(z_1, z_2; z_3, z_4)$ の偏角は $\theta - \varphi = 0$ となり確かに実数である．一方 z_1, z_2 がそれぞれ異なる円弧上にあれば，やはり円周角の定理より $\theta - \varphi = \pm\pi$ であって，複比の偏角は $\pm\pi$ だからやはり実数である．∎

このように複比の値は複素平面上の図形を決める．

定理 9.18 では初等幾何における円周角の定理を援用して証明を行ったが，実は定理の主張はまだきわめて不十分である．そこで二重手間にはなるが改めて定理 9.18 をより完全な形で述べ，射影変換と複比の関係を用いて不変式論的な証明を与えよう．

定理 9.19　複素平面上の一次分数変換を考える．

(1) 複素平面上の円または直線は，一次分数変換によって再び円または直線に写る[7]．これを**円円対応**と呼ぶ．

(2) 円周上の相異なる 4 点に対してその複比は実数である．

(3) 逆に複素平面上の相異なる 3 点 z_1, z_2, z_3 が与えられたとき

$$C = \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{cr}(z_1, z_2; z_3, w) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$$

はこの 3 点を通る円または直線に一致する．ただし $w = z_1$ のときには複比を $\mathrm{cr}(z_1, z_2; z_3, w) = \infty$ と解釈する．

証明　(1) 一次分数変換は射影変換 π_g $(g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))$ を複素平面上で考えたものであった．正則行列 g は基本行列のいくつかの積で書くことができる (補題 7.6) が，2 次の正方行列の場合，基本行列は

[7] 証明で明らかになるように円が直線に写ったり，直線が円に写ったりすることがある．

$$R_1=\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix},\quad R_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad R_3=\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix},\quad R_3'=\begin{pmatrix}1&0\\b&1\end{pmatrix}$$

の 4 種である $(a,d\neq 0)$．しかし

$$\begin{pmatrix}1&0\\b&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

なので，最後の行列 R_3' は必要がなく，結局 g は 3 種類の行列 R_1,R_2,R_3 の積で書けていることが分かる．そこで，円または直線をこの 3 種の基本行列に対応する一次変換で写したときに円または直線に写ることを示せばよい．

まず最初の行列 R_1 を考えよう．この行列に対応する一次変換は

$$\pi_{R_1}(z)=\frac{a\cdot z+0}{0\cdot z+d}=\frac{a}{d}z$$

であって，複素数 a/d を掛けるだけである．これはよく知られているように原点を中心とする回転と相似変換の合成であり，円や直線はやはり円または直線に写る[8)]．次に π_{R_3} を先に考えよう．このときは

$$\pi_{R_3}(z)=\frac{1\cdot z+b}{0\cdot z+1}=z+b$$

であり，これは b 方向の平行移動である．もちろんこの場合にも円や直線は円または直線に写る．基本行列 R_1,R_3 に対応する一次分数変換では，円は円に，直線は直線に写っていることにも注意しておこう．

最後に π_{R_2} を考える．このとき一次分数変換は

$$\pi_{R_2}(z)=\frac{0\cdot z+1}{1\cdot z+0}=\frac{1}{z}$$

で与えられている．まず円をこの変換で写してみよう．円の方程式は円の中心を a とし[9)]，半径を R と書くと $|z-a|^2=R^2$ で与えられている．そこで $w=1/z$ を一次分数変換による像の変数とすると

$$R^2=|1/w-a|^2=(1/w-a)(1/\overline{w}-\overline{a}),\quad \text{分母を払って}$$

$$(1-aw)(1-\overline{aw})=R^2|w|^2,$$

---

8) §4.1 では絶対値が 1 の複素数 $e^{i\theta}$ による積が複素平面上の回転を引き起こすことを学んだが，任意のゼロでない複素数は $u=re^{i\theta}$ $(r>0)$ と極表示できるから，複素数 u を掛けることはまず原点を中心として角度 θ の回転を行い，しかる後，やはり原点を中心に r 倍の相似変換を行うことに相当する．

9) 正則行列の $(1,1)$ 成分と記号がかぶるが，ここでは混乱はないであろう．お許しいただきたい．

$$\therefore \quad (|a|^2 - R^2)|w|^2 - aw - \overline{aw} + 1 = 0$$

ここで $|a|^2 \neq R^2$ つまり円周上に原点がないとしよう．すると上の式を変形して

$$\left| w - \frac{\overline{a}}{|a|^2 - R^2} \right|^2 = \left(\frac{R}{|a|^2 - R^2} \right)^2$$

を得る．これは確かに円の方程式である．一方 $|a|^2 - R^2 = 0$ のときは上の式は $aw + \overline{aw} = 1$ であって，これは直線 $w + \overline{w} = 1$ (実部が 1/2 の複素数全体) 上の点を a^{-1} との積を取ることによって移動したものである．

次に直線を π_{R_3} によって写してみよう．複素平面の任意の直線は，原点の回りに回転し，それを平行移動することで虚軸 $z + \overline{z} = 0$ に重ねることができる．したがって，ある複素数 $a \neq 0$ および b を取ると一般の直線の方程式は

$$(az - b) + \overline{(az - b)} = 0$$

と書ける．これを整理すると $az + \overline{az} = b + \overline{b}$ となるが，やはり $w = 1/z$ という一次分数変換で円 ($b + \overline{b} \neq 0$ のとき) または直線 ($b + \overline{b} = 0$ のとき) に写る．

以上で円または直線の π_g による像が，また，円あるいは直線に含まれることが示された．一方 π_g は可逆であり，逆写像 $\pi_{g^{-1}}$ も同じ性質を持っているから円と円 (あるいは直線) の間の対応は全単射でなければならない．したがって π_g による円や直線の像は円あるいは直線全体になっていることが分かる．

(2) 相異なる 4 点 $z_1, \ldots, z_4$ が円周上にあったとしよう．一次分数変換 (射影変換) π_g で z_1, z_2, z_3 を $\infty, 0, 1$ に写すことができる．(1) より z_i の載っている円は π_g によって円または直線に写るが，3 点 $\infty, 0, 1$ は実軸上にあるので，その像は実軸に一致する．したがって残りの 1 点 $w = \pi_g(z_4)$ も実軸上にある．一方，複比は一次分数変換で不変であるから

$$\mathrm{cr}(z_1, z_2; z_3, z_4) = \mathrm{cr}(\infty, 0; 1, w) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & w \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = w$$

は実数である

(3) まず 3 点 z_1, z_2, z_3 を一次分数変換 π_g によって $\infty, 0, 1$ に写して考えよう．このとき複比は変わらないから，$w \in C$ なら

$$\mathbb{R} \ni \mathrm{cr}(z_1, z_2; z_3, w) = \mathrm{cr}(\infty, 0; 1, \pi_g(w)) = \pi_g(w)$$

である．つまり $\pi_g(C) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ であるが，同様の考察により $\pi_{g^{-1}}(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \subset C$ が成り立つ．この 2 式より $C = \pi_{g^{-1}}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ が分かり，一次分数変換 $\pi_{g^{-1}}$ によって直線は円または直線に写るから，実軸の像である C は円または直線に一致する． ∎

この定理の証明において，3 点 z_1, z_2, z_3 を $\infty, 0, 1$ に写すような一次分数変換を π_g で表すと

$$\mathrm{cr}(z_1, z_2; z_3, w) = \pi_g(w)$$

であることが分かった．もし w が 3 点 z_1, z_2, z_3 を通る円 C 上にあれば，複比を取る写像

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\mathrm{cr}(z_1,z_2;z_3,-)} & \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ \Psi & & \Psi \\ w & \longmapsto & \mathrm{cr}(z_1, z_2; z_3, w) \end{array}$$

は円と実射影直線との間の全単射を与えており，この逆写像

$$w = \pi_{g^{-1}}(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$$

は円のパラメータ表示を与えていることになる．このとき

$$\begin{aligned} w \text{ が 弧 } \widehat{z_1 z_2} \text{ 上にあれば} \quad & \mathrm{cr}(z_1, z_2; z_3, w) < 0, \\ \text{弧 } \widehat{z_2 z_3} \text{ 上にあれば} \quad & 0 < \mathrm{cr}(z_1, z_2; z_3, w) < 1, \\ \text{弧 } \widehat{z_3 z_1} \text{ 上にあれば} \quad & 1 < \mathrm{cr}(z_1, z_2; z_3, w) \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，例えば弧 $\widehat{z_1 z_2}$ は z_1, z_2 を端点とする円弧のうち z_3 を含んでいない円弧を表す．

演習 9.20 $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ と置く．

(1) 一次分数変換 π_γ は実軸を単位円に写すことを示せ．

(2) 実軸を保つ一次分数変換が π_g $(g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ と書けることを利用して，単位円を保つような一次分数変換は

$$\pi_h(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}} \quad h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

の形であることを示せ．ただし $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ であって $|\alpha|^2 \neq |\beta|^2$ である．

9.7　不変式としての複比

射影直線上の 4 点の複比の不変式論的な意味を別の観点からもう少し考えてみよう．射影直線上の 4 点は $\underbrace{\mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1}_{4\text{ 個}} = (\mathbb{P}^1)^4$ で表される．もともと $\mathbb{P}^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$ であったことを思い出し，$V = \mathbb{C}^2$ と置いて $(\mathbb{P}^1)^4$ の代わりに $V^4 = V \oplus V \oplus V \oplus V$ を考えることにしよう．ベクトル空間の直和は集合としては直積と同じなので $V^4 = V \times \cdots \times V$ と考えてもよく，要するに 4 個のベクトルの順序付けられた組である．さて，射影直線からベクトル空間に移行する代わりに V^4 には 4 次元トーラス $T = (\mathbb{C}^\times)^4$ の作用も考えることにする．つまり $t = (t_1, \ldots, t_4) \in T$ に対して

$$t \cdot (v_1, \ldots, v_4) = (t_1 v_1, \ldots, t_4 v_4)$$

である．一般線型群は $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ に対して

$$g \cdot (v_1, \ldots, v_4) = (g v_1, \ldots, g v_4)$$

として作用するから $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の作用と T の作用は可換である．

直積空間 V^4 の元は 4 個のベクトルの組 $(v_1, \ldots, v_4)$ であるが，それを横に並べると 2×4 行列 $A = (v_1, \ldots, v_4) \in \mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{C})$ が得られる．以下の議論では，この対応で $V^4 = \mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{C})$ とみなし，場合によってベクトルの組としての表示と行列としての表示を使い分けることにする．このとき $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times T$ の作用は次のように書くことができる．$(g,t) \in G$ に対して，$t = (t_1, \ldots, t_4)$ を 4 次の対角行列 $\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_4)$ と同一視して $T \subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ と考える．すると $A \in \mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{C})$ への $(g,t) \in G$ の作用は

$$(g,t) \cdot A = gAt, \quad t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_4)$$

で与えられることになる．ここで右辺の積は単なる行列の積を表している．

このようにして与えられた $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times T$ の V^4 への作用に関する不変式をまず見てみよう．

補題 9.21　$G \curvearrowright V^4$ の不変式環は自明である．つまり $\mathbb{C}[V^4]^G = \mathbb{C}$ が成り立つ．

既に見たように複比は紛れもない $(\mathbb{P}^1)^4$ 上の不変式であるから，この結論はそれと矛盾しているように思われる．しかし，これは $V \setminus \{0\}$ そのものではな

く V 全体を考えたことによって起こる齟齬(そご)なのである．

注意 9.22 複比は "相異なる" 4 点を取って定義されていたことに注意しよう．したがって，$(\mathbb{P}^1)^4$ そのものではなく，そのうちの相異なる 4 点を表す部分集合だけを見ていることになる．この点も一見矛盾が生じているように思われる理由の 1 つとなっている．

演習 9.23 補題 9.21 を証明せよ．[ヒント] 任意の軌道が極限として原点を含むことを示せ．さらに例 7.31 を参考にせよ．

しかしベクトル空間としての V の構造は捨てがたいので，我々は設定をそのままにして，不変式として不変多項式だけではなく不変有理式も考えてみることにしよう．このとき鍵になるのは相対不変式である．少し相対不変式について復習しておこう．

群 G のベクトル空間 W 上の表現 $G \curvearrowright W$ が与えられたとき，$f(x) \in \mathbb{C}[W]$ が G-相対不変式であるとは，$g \in G$ に対してある定数 $\chi(g) \neq 0$ が存在して，$f(gx) = \chi(g)f(x)$ $(\forall x \in W)$ が成り立つときに言うのであった．$\chi(g)$ は G の指標である．2 つの相対不変式 $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[W]$ が同じ指標に従うと仮定しよう．つまり $g \in G$ に対して

$$f_1(gx) = \chi(g)f_1(x), \quad f_2(gx) = \chi(g)f_2(x) \quad (\forall x \in W)$$

である．すると $f(x) = f_1(x)/f_2(x)$ は不変有理式になり，このようにして不変式を十分たくさん得ることができるのである．

定理 9.24 上で考えた $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times T$ の V^4 への作用に関する相対不変式は $D_{ij}(v) = \det(v_i, v_j)$ で生成される．このとき D_{ij} に対応する指標は $\chi_{ij}(g,t) = (\det g)t_it_j$ である．

証明 相対不変式の全体は不変式環のように環をなすわけではないので "生成する" という意味が問題であるが，ここでは相対不変式全体で生成された $\mathbb{C}[V^4]$ の部分環が D_{ij} たちによって生成されるという意味にとろう[10]．

証明には表現論が必要であるが，その準備をする余裕がない．以下，簡約代数群の表現論を既知として証明の概略を与えるが，不慣れな読者はこの証明を飛ばして先に進んでほしい．ただ，この種の定理の証明には群の表現が強力な

---

10) 実は相対不変式全体が生成する $\mathbb{C}[V^4]$ の部分環は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の不変式環と一致する．

道具になることを覚えておいていただけると幸いである.

G の働く空間 V^4 は 2×4 行列のなすベクトル空間 $\mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{C})$ と同一視できる. このとき $\mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{C})$ には左からの掛け算で $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が, 右からの掛け算で $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ が作用している. この作用を $A\in \mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{C})$ に対して

$$A\mapsto gA\,{}^t h \quad (g\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}),\, h\in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})) \tag{9.13}$$

で決めよう[11]. すると $\mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{C})$ 上の多項式環は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\times \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ 加群になるが, それは次のように分解することが知られている[12].

$$\mathbb{C}[\mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{C})]\simeq \bigoplus\nolimits_{\lambda}(F_{\lambda}^{(2)})^*\otimes (F_{\lambda}^{(4)})^* \tag{9.14}$$

ここで $F_{\lambda}^{(k)}$ は $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ の最高ウェイトが λ の既約有限次元表現で, $(F_{\lambda}^{(k)})^*$ はその双対表現, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{Z}^2$ は $\lambda_1\geq\lambda_2\geq 0$ の範囲を動く. ただし λ を $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ の最高ウェイトとみなすときには $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,0,0)$ と末尾に 0 を適宜追加して考える.

我々は $G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\times T$ の相対不変式を知りたいのだが, $T\subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ を対角行列として埋め込んでおくと, これは $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ の極大トーラスである. したがって G の相対不変式を求めるには, まず $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の指標に対応する表現を考え, その表現のうち $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ の極大トーラスのウェイトベクトルになっているものを取り出せばよい. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の指標は $\det(g)^m$ $(m\in\mathbb{Z})$ の形のものしかなく, それに対応する最高ウェイトは $\lambda=(m,m)$ である. したがって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の表現についてはこの λ を選ぶしかなく, 既約分解 (9.14) のうち $\lambda=(m,m)$ に対応するのは

$$(F_{(m,m)}^{(2)})^*\otimes(F_{(m,m,0,0)}^{(4)})^*=\det{}^{-m}\otimes(F_{(m,m,0,0)}^{(4)})^* \quad (m\geq 0)$$

である. よって $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ の既約表現 $(F_{(m,m,0,0)}^{(4)})^*$ のウェイトベクトルを列挙できればよい.

表現 $\det{}^{-m}\otimes(F_{(m,m,0,0)}^{(4)})^*$ の最高ウェイトベクトルは容易に分かるように $D_{1,2}^m$ であって, この最高ウェイトベクトルに負のルートに対応するリー環の元 (ルートベクトル) を何度か作用させることによってすべてのウェイトベクトル

---

[11] このように決めると $T\subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ を対角行列として埋め込んだとき, $G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\times T$ の $V^4=\mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{C})$ への作用は, まさしく式 (9.13) で決められた作用と一致することに注意する.

[12] この分解を含めて, 表現論の用語や概念については, 例えば [27], [25], [4] などを参照されたい.

を得ることができる．このようにして得たウェイトベクトルはすべて

$$\prod_{i,j} D_{ij}^{\alpha_{ij}} \quad (\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sum_{i,j} \alpha_{ij} = m)$$

の一次結合の形をしており，しかもこの行列式の積自身がウェイトベクトルであることは容易に分かる．

相対不変式に附随する指標はここに現れた 1 次元表現に他ならないが，多項式環上の正則表現を考える際に $\rho(g)f(x) = f(g^{-1}x)$ と，g の逆元を取って定義されていたことを思い出せば，ちょうど上の表記と定理の主張に現れる指標が一致することが分かる．■

このことから，指標 χ の相対不変式は

$$f = \sum_{\alpha} c_\alpha \prod_{i,j} D_{ij}^{\alpha_{ij}}, c_\alpha \in \mathbb{C}; \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}; \quad \chi = \prod_{i,j} \chi_{ij}^{\alpha_{ij}}$$

と書けており，そのような同じ指標を持つ 2 つの相対不変式の比が不変有理式を与えることが分かる．ただし $\alpha = (\alpha_{ij})$ は多重指数である．

定理 9.25 作用 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times T \curvearrowright V^4$ に関する不変有理式は，複比 $\lambda = \mathrm{cr}(p_1, p_2; p_3, p_4)$ の有理関数である．

証明 ベクトル空間 $V^4 = \mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{C})$ 上の不変有理式を

$$f(A) = f_1(A)/f_2(A) \ \ (A \in \mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{C}))$$

と書いておこう．ただし f_1, f_2 は行列の成分の多項式である．このとき $f(A)$ は $\mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{C})$ の稠密な部分集合上の値によって決定される．

そこで $U \subset \mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{C})$ を，行列

$$A = (v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

で $D_{ij} = \det(v_i, v_j) \neq 0 \ (i \neq j)$ を満たすようなもの全体からなる開かつ稠密な部分集合としよう．すると行列 $A \in U$ は $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を左から掛けることによって

$$gA = \begin{pmatrix} a_1' & 0 & 1 & a_4' \\ 0 & b_2' & 1 & b_4' \end{pmatrix} \quad (a_1', b_1', a_4', b_4' \neq 0)$$

と変形できる (式 (9.10) 参照)．一方 $T = (\mathbb{C}^\times)^4$ の作用によって行列の各列はゼロでない定数倍をすることが可能であるから $t \in T$ を右から掛けることによって

$$gAt = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.15}$$

とできる．このとき λ は 4 点の複比であった (式 (9.11) 参照)．$f(A)$ は $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times T$ の作用によって不変であるから

$$f(A) = f(gAt) = \frac{f_1(gAt)}{f_2(gAt)}$$

であるが，ここで f_1, f_2 は行列の各成分の多項式なので gAt の形 (9.15) から，これらは λ の多項式である．したがって $f(A)$ は複比 λ の有理式である． ■

一般に，多項式環上の G 不変有理式は相対不変式の比で書けることが知られている ([11, Theorem 3.3])．したがって，上の定理は本質的には定理 9.24 とその後の考察で述べたことの帰結と言ってもよいのだが，ここでは独立に証明を与えた．

9.8　プリュッカーの関係式とプトレマイオスの定理

定理 9.25 より，複比 $\mathrm{cr}(p_1, p_2; p_3, p_4)$ の 4 点の順序を変えたもの，例えば $\mathrm{cr}(p_2, p_3; p_1, p_4)$ はもとの複比

$$\lambda = \mathrm{cr}(p_1, p_2; p_3, p_4) = \frac{D_{13} D_{24}}{D_{14} D_{23}} \tag{9.16}$$

の有理関数で表されることが分かる．点の順序を入れ替えた複比すべてについて，それを λ で表してみよう．

定理 9.26　射影直線上の 4 点の複比 $\lambda = \mathrm{cr}(p_1, p_2; p_3, p_4)$ を考える．このとき，点の順序を入れ替えた複比は λ によって次のように表される．

$$\mathrm{cr}(p_1, p_2; p_3, p_4) = \lambda, \qquad \mathrm{cr}(p_1, p_3; p_2, p_4) = 1 - \lambda,$$
$$\mathrm{cr}(p_1, p_2; p_4, p_3) = 1/\lambda, \qquad \mathrm{cr}(p_1, p_4; p_3, p_2) = \lambda/(\lambda - 1),$$
$$\mathrm{cr}(p_1, p_3; p_4, p_2) = 1/(1 - \lambda), \qquad \mathrm{cr}(p_1, p_4; p_2, p_3) = (\lambda - 1)/\lambda.$$

この他にも 4 点の配置の順序はあり得るが，それらはここにあげた 6 通りのいずれかに一致する．

証明　複比は射影変換で不変だから

$$p_1 = [1:0],\ p_2 = [0:1],\ p_3 = [1:1],\ p_4 = [\lambda:1]$$

として一般性を失わない．すると，例えば

$$\mathrm{cr}(p_1,p_4;p_3,p_2) = \frac{D_{13}D_{42}}{D_{12}D_{43}} = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}} = \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

となる．他の場合も全く同じようにして計算できる．

4 点の順列は全部で 24 通りあり，ここにあげたのは 6 通りのみである．すべての場合を計算することなく，他の場合もこの 6 通りの場合のいずれかと一致することを示そう．それには $\mathfrak{S}_4$ の部分群

$$H = \{e, (14)(23), (13)(24), (12)(34)\} \subset \mathfrak{S}_4$$

を考えるとよい．この部分群による点の再配置では複比 $\mathrm{cr}(p_1,p_2;p_3,p_4)$ は変化しない．実際，例えば (14)(23) で点の配置を変更すれば，λ の行列式表示 (9.16) の分母・分子はちょうど符号が相殺されて変化しないことが分かるだろう．そうすると，複比の変化は右剰余類 $\mathfrak{S}_4/H$ にのみ依ることが結論され，その代表元がちょうど定理の主張にある 6 通りの変化をもたらすのである． ∎

複比の定義に現れる 2 次の行列式 $D_{ij} = \det(v_i, v_j)$ は**プリュッカーの関係式**[13] と呼ばれる等式を満たす．これは後で必要になるが，上の定理で得られた複比の関係を使って示しておこう．

定理 9.27 行列 $A = (v_1, \ldots, v_4) \in \mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{C})$ に対して $D_{ij} = \det(v_i, v_j)$ と置くと次のプリュッカーの関係式が成り立つ．

$$D_{12}D_{34} + D_{13}D_{42} + D_{14}D_{23} = 0.$$

証明 定理 9.26 より

$$\mathrm{cr}(p_1,p_3;p_2,p_4) = 1-\lambda = 1-\mathrm{cr}(p_1,p_2;p_3,p_4)$$

であるが，これを行列式で書き直すと

$$\frac{D_{12}D_{34}}{D_{14}D_{32}} = 1 - \frac{D_{13}D_{24}}{D_{14}D_{23}}$$

となる．分母を払って，移項すればプリュッカーの関係式を得る． ∎

---

13) Plücker, Julius (1801–1868).

プリュッカーの関係式は様々な場面で登場し，証明もそれに応じていろいろなものが知られている．ここでは別証を紹介しておこう．

証明　左辺は $v_1, \ldots, v_4$ の関数であるからそれを $F(v_1, \ldots, v_4)$ と書く．F が各成分について線型 (多重線型) であることはすぐに分かる．さらに成分であるベクトル v_1, v_2, v_3, v_4 のうち任意の 2 つの成分を入れ替えると F が (-1) 倍されることを示そう．例えば v_2, v_3 を入れ替えてみると

$$\begin{aligned} F(v_1, v_3, v_2, v_4) &= D_{13}D_{24} + D_{12}D_{43} + D_{14}D_{32} \\ &= -D_{13}D_{42} - D_{12}D_{34} - D_{14}D_{23} = -F(v_1, v_2, v_3, v_4) \end{aligned}$$

である．したがって，もし $w = v_2 = v_3$ ならば $F(v_1, w, w, v_4) = 0$ が分かる．ほかの組についても全く同様で，いずれか 2 つの成分が一致していれば $F = 0$ となる．

さて $v_i \in \mathbb{C}^2$ であったが，$\mathbb{C}^2$ の 3 つのベクトル v_1, v_2, v_3 は一次従属である．このとき 3 つのベクトルのうち 1 つは残りのベクトルの一次結合で表すことができる．そこで，例えば $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$ と書けたとしよう．すると

$$\begin{aligned} F(v_1, v_2, v_3, v_4) &= F(v_1, v_2, \alpha v_1 + \beta v_2, v_4) \\ &= \alpha F(v_1, v_2, v_1, v_4) + \beta F(v_1, v_2, v_2, v_4) = 0 \end{aligned}$$

である．v_1, v_2, v_4 が他のベクトルの一次結合の場合も同様である．■

演習 9.28　$v_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ と置く．このとき次の 3 次の行列式がゼロであることを示し，プリュッカーの関係式を導け．

$$\begin{vmatrix} D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}.$$

[ヒント]　$D_{12} = a_1 b_2 - a_2 b_1$ 等よりこの行列式の第 1 行目は $-b_1(a_2, a_3, a_4) + a_1(b_2, b_3, b_4)$ と書ける．

§9.6 では複素平面上で円と複比の関係について考えたが，ここではプリュッカーの関係式を複素平面上で考えるとプトレマイオスの定理と呼ばれている，円の内接 4 角形に関する等式を導くことを紹介しよう．

そこで，複素平面上の 4 点 $z_1,\dots,z_4 \in \mathbb{C}$ を取る．射影平面上の点と考えるときには $p_i = [z_i : 1]$ と連比で表されるのであった．4 点 $z_1,\dots,z_4$ が円周上にあれば，定理 9.19 によってその複比は実数である．さらにその後で調べたことから，4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 がこの順序で反時計回りに円周上にあると

$$1 < \mathrm{cr}(z_1, z_2; z_3, z_4), \quad \mathrm{cr}(z_1, z_3; z_2, z_4) < 0$$

である．プリュッカーの関係式より

$$\mathrm{cr}(z_1, z_3; z_2, z_4) = 1 - \mathrm{cr}(z_1, z_2; z_3, z_4)$$

だったから，符号を考慮してこの両辺の絶対値を取ると

$$|\mathrm{cr}(z_1, z_3; z_2, z_4)| = |\mathrm{cr}(z_1, z_2; z_3, z_4)| - 1,$$
$$\frac{|z_1 - z_2| \cdot |z_3 - z_4|}{|z_1 - z_4| \cdot |z_3 - z_2|} = \frac{|z_1 - z_3| \cdot |z_2 - z_4|}{|z_1 - z_4| \cdot |z_2 - z_3|} - 1$$

が得られる．さらに両辺の分母を払って整理すると

$$|z_2 - z_1| \cdot |z_4 - z_3| + |z_4 - z_1| \cdot |z_3 - z_2| = |z_3 - z_1| \cdot |z_4 - z_2|$$

となる．ここで $z_1,\dots,z_4$ の代わりに A, B, C, D を用いると上の式は

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{DA} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD} \tag{9.17}$$

と書き直すことができる．これを**プトレマイオスの定理**[14)]と呼ぶ (図 9.2).

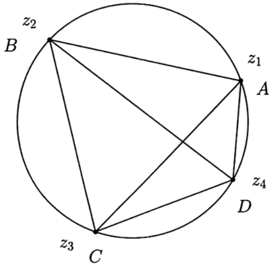


図 9.2 プトレマイオスの定理

まとめておこう．

---

14) Ptolemy, Claudius (85?–165?). プトレマイオスはプトレミーとも言う．アレクサンドリアの天文学者で，三角法などの業績で有名．

定理 9.29　円に内接する 4 角形 $ABCD$ の相対する 2 組の辺の積の和は，対角線の積に等しい．つまり式 (9.17) が成り立つ．

9.9　射影直線上の点配置と j 不変量

§9.7 では射影直線上の 4 点の点配置を，順序を指定して考えたが，順序を指定しない点配置はいろいろな意味で重要である．この節では $\mathbb{P}^1$ 上の 4 点の順序を指定しないとどうなるかを考え，その意味を調べることにする．以下 §9.7 の記号や設定をそのまま引き継いで使用する．

順序を指定したときには，群 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times T$ の作用 $G \curvearrowright V^4$ を考えていた．ここに $T = (\mathbb{C}^\times)^4$ は 4 次元トーラス群であり，$V = \mathbb{C}^2$ である．配置の順序を変えることによって 4 次の対称群 $\mathfrak{S}_4$ が自然に作用していることに注意しよう．この作用は，$V^4 = \mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{C})$ とみなせば行列の各列を入れ替えることに相当しており，式で表すと

$$\sigma \cdot A = A T_{\sigma^{-1}} \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_4,\ A \in \mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{C}))$$

となる．ただし T_σ は置換行列を表しており (例 3.2 参照)，T_σ の転置行列は $T_{\sigma^{-1}}$ であることを用いた．

対称群 $\mathfrak{S}_4$ の作用は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の作用と可換であるが，T の作用とは可換ではない．実際 $(g,t) \in G$ と $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ に対して

$$\begin{aligned}(g,t)\cdot(\sigma\cdot A) &= (g,t)\cdot(A T_{\sigma^{-1}}) \\ &= g A T_{\sigma^{-1}} \operatorname{diag}(t_1,\ldots,t_4) \\ &= g A (T_{\sigma^{-1}} \operatorname{diag}(t_1,\ldots,t_4) T_\sigma) T_{\sigma^{-1}} \\ &= g A \operatorname{diag}(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(4)}) T_{\sigma^{-1}}\end{aligned}$$

だから $t^\sigma = (t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(4)})$ と書けば $(g,t)\cdot(\sigma\cdot A) = \sigma\cdot((g,t^\sigma)\cdot A)$ が成り立つ．このような状況をうまく記述するには**半直積群** $\mathfrak{S}_4 \ltimes T$ が便利である．半直積群は，集合としては直積 $\mathfrak{S}_4 \times T$ であるが，群の演算としては成分ごとの積でなく，少し捩った積

$$(\tau,t)\cdot(\sigma,s) = (\tau\sigma, t^\sigma s) \quad ((\tau,t), (\sigma,s) \in \mathfrak{S}_4 \ltimes T)$$

を考えたものである[15])．

演習 9.30 このようにして定義された半直積群 $\mathfrak{S}_4 \ltimes T$ が確かに群の公理を満たすことを確かめよ．

半直積群 $\mathfrak{S}_4 \ltimes T$ を用いると結局

$$\begin{aligned}&\widetilde{G} := \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times (\mathfrak{S}_4 \ltimes T) \ni h = (g,(\sigma,t)),\\ &g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}),\ \sigma \in \mathfrak{S}_4,\ t = (t_1,t_2,t_3,t_4) \in T = (\mathbb{C}^\times)^4\end{aligned} \tag{9.18}$$

が自然に V^4 に作用していることが分かる．また $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times T$ や $\mathfrak{S}_4$ は自然に $\widetilde{G}$ の部分群とみなすことができる．

$\widetilde{G}$ の不変式は射影変換でも変わらないし，点の順序にもよらない，射影空間内の 4 点配置を特徴付ける関数であると考えられる．ここで射影変換で変わらないことは関数が $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 不変であることにあたり，点の順序によらないことは $\mathfrak{S}_4$ 不変であること，そして各点が射影平面上の点を表すことは V^4 の各成分が $\mathbb{C}^\times$ の作用で不変であることに相当している．

まず，不変式ではなく $\widetilde{G}$ の相対不変式を求めることを考えてみよう．そのためには $\widetilde{G}$ の指標 (1 次元表現) がどのようなものであるか知っておく必要がある．

補題 9.31 $\widetilde{G}$ の指標は $(g,(\sigma,t)) \in \widetilde{G}$ に対して

$$\begin{aligned}\chi(g,(\sigma,t)) = (\det g)^k\,(t_1t_2t_3t_4)^m\,(\operatorname{sgn}\sigma)^\varepsilon\\ (k,m \in \mathbb{Z},\ \nu \in \mathbb{Z}^4,\ \varepsilon = 0,1)\end{aligned} \tag{9.19}$$

で与えられる．ここで $\operatorname{sgn}\sigma = \det(T_\sigma)$ は $\mathfrak{S}_4$ の**符号表現**である

証明 直積群の指標は各成分になっている群の指標の積で表されることが一般論で知られている．したがって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の指標と半直積群 $\mathfrak{S}_4 \ltimes T$ の指標が分かっていればよいが，一般に $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の指標は行列式の冪である[16])．問題は半直積群の指標である．$\mathfrak{S}_4$ および $T = (\mathbb{C}^\times)^4$ はそれぞれ半直積群の部分群なので，$\mathfrak{S}_4 \ltimes T$ の指標をこの 2 つの部分群に制限してもやはりそれぞれの部分群の指標である．$\mathbb{C}^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ であることに注意すると，T に制限した指標は $t^\nu = t_1^{\nu_1}\ldots t_4^{\nu_4}$ の格好をしているが，$\sigma^{-1}t\sigma = t^\sigma$ だから

---

15) 詳しくは，例えば [38] 参照．

16) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ と $\mathfrak{S}_n$ の指標 (1 次元表現) については，例えば [27], [23] を参照してほしい．

$$\chi(\sigma^{-1}t\sigma) = \chi(\sigma)^{-1}\chi(t)\chi(\sigma) = \chi(t) = t^{\nu}$$
$$= \chi(t^{\sigma}) = t_{\sigma(1)}^{\nu_1} \cdots t_{\sigma(4)}^{\nu_4}$$

であって $\nu = (\nu_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \nu_{\sigma^{-1}(4)})$ が成り立つ必要がある．$\sigma \in \mathfrak{S}_4$ は任意の置換を表すので $\nu = (m,m,m,m)$ の形でなければならない．

一方 $\mathfrak{S}_4$ の指標は，自明なものかあるいは符号表現であることが知られているので，補題の形の指標がすべてであることが分かる．∎

さて，指標が求まったので相対不変式について考えてみよう．いま $\widetilde{G}$ の V^4 への作用が与えられたが，このとき多項式の空間 $\mathbb{C}[V^4]$ 上には，$\widetilde{G}$ が正則表現として働く．具体的には，式 (9.18) のように表された h に対して

$$\rho(h)f(A) = f(h^{-1} \cdot A) = f(g^{-1}AT_{\sigma}t^{-1}) \quad (A \in \mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{C}) = V^4)$$

のように作用する．$f(A)$ が $\widetilde{G}$ の作用による相対不変式であるとは $\rho(h^{-1})f(A) = \chi(h)f(A)$ となる指標 χ が存在するということに他ならない[17)]．

定理 9.32　$\widetilde{G} \curvearrowright V^4$ の相対不変式は，$D_{ij}(v) = \det(v_i, v_j)$ と置くとき，

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} (\operatorname{sgn}\sigma)^{\varepsilon}\rho(\sigma)\left(\prod_{\alpha} D_{ij}^{\alpha_{ij}}\right) \quad (\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \varepsilon = 0, 1) \tag{9.20}$$

によって (ベクトル空間として) 生成される．ただし α_{ij} $(i<j)$ は条件

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 4} \alpha_{ij}(e_i + e_j) = m(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

を満たしているとする．相対不変式 (9.20) に対応する指標は次の式で与えられる．

$$\chi(g, (\sigma, t)) = (\det g)^{2m}(t_1t_2t_3t_4)^m(\operatorname{sgn}\sigma)^{\varepsilon}.$$

証明　$\widetilde{G}$ の相対不変式はもちろん G の相対不変式でもある．定理 9.24 によって G の相対不変式は D_{ij} たちのいくつかの積によって生成されることが分かっているが，これが $\mathfrak{S}_4$ の相対不変式になっていればよい．

そこで $\widetilde{G}$ の指標 $\chi_{k,\nu}(g, (\sigma, t)) := (\det g)^k \cdot t^{\nu}$ に属する相対不変式 $f(A)$ $(A \in V^4)$ をまず考えよう．これは補題 9.31 の式 (9.19) において $\varepsilon = 0$ の場合に相当するが，このとき $\nu = (m,m,m,m)$ でなければならないのであった．す

17) 相対不変式の定義が習慣的に $f(hA) = \chi(h)f(A)$ を満たすようなものとされるので，ここでは逆元の分だけ差異が生じている．

ると必然的に $k = 2m$ でなければならない.

$\mathfrak{S}_4$ の指標としては自明な指標を取ったので，それは $f(A)$ が $\mathfrak{S}_4$ の作用によって不変であることを意味する．有限群に対しては，その自明な表現への射影が**レイノルズ作用素**という名称でよく知られているが，今の場合にはレイノルズ作用素は $f(x) \in \mathbb{C}[V^4]$ に対して

$$\frac{1}{\#\mathfrak{S}_4} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_4} \rho(\sigma) f(A) = \frac{1}{\#\mathfrak{S}_4} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_4} f(AT_\sigma)$$

と書ける．要するに群の作用によって平均すれば不変になるということである．また，符号 sgn に対応する表現への射影は全く同様にして

$$\frac{1}{\#\mathfrak{S}_4} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_4} (\operatorname{sgn}\sigma)\rho(\sigma) f(A)$$

と表すことができる．これらの形が式 (9.20) に一致することは見易い． ∎

この定理において，式 (9.20) で与えられた生成元は一次独立とは限らないし，甚だしい場合はゼロになってしまうことがある．

演習 9.33 (1) $\tau = (1,2)$ を数字 $1, 2$ の互換とするとき $\rho(\tau)D_{12} = -D_{12}$ であることを示せ．

(2) $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_4} \rho(\sigma)(D_{12}D_{34})$ は式 (9.20) にあげられた生成元の形をしているが，これはゼロであることを示せ．

(3) 同様にして $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_4} (\operatorname{sgn}\sigma)\rho(\sigma)(D_{12}D_{34})^2$ もゼロになることを示せ．

前節のように不変有理式を考えようとすると，同じ指標を持つ相対不変式が少なくとも 2 次元以上ないと自明な不変式，つまり定数関数しか得られない．そこで指標を固定したとき，いつ相対不変式が 2 次元以上になるかを考えてみる．

$$\alpha = D_{12}D_{34}, \quad \beta = D_{13}D_{42}, \quad \gamma = D_{14}D_{23}$$

と置く．するとプリュッカーの関係式 $\alpha + \beta + \gamma = 0$ が成り立っている (定理 9.27 参照)．一方，部分群

$$H = \{e, (14)(23), (13)(24), (12)(34)\} \subset \mathfrak{S}_4$$

の作用で α, β, γ は固定されるので，結局 $\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_4/H$ が α, β, γ に働く[18]．具

---

[18] H は §2.3 で考えた準同型 $\varphi : \mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$ の核 $\operatorname{Ker}\varphi$ に他ならず，正規部分群である．その商群 $\mathfrak{S}_4/H$ は $\mathfrak{S}_3$ に一致する．

体的に計算すると，この $\mathfrak{S}_3$ の作用は sgn⊗(置換表現) であることが分かる．

プリュッカーの関係式 $\alpha+\beta+\gamma=0$ を考慮すれば，α,β,γ の対称式は 5 次式までは各次数に 1 次元しかなく，6 次式では

$$(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3, \quad (\alpha\beta\gamma)^2$$

を基底に持つ．したがって，この比は非自明な不変有理式を与える．一方

$$\lambda=\mathrm{cr}(p_1,p_2;p_3,p_4)=\frac{D_{13}D_{24}}{D_{14}D_{23}}=-\frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{-\beta-\gamma}{\gamma}=\lambda-1$$

は複比であった．これを考慮に入れると

$$\begin{aligned}\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha&=\gamma^2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)\\&=\gamma^2((\lambda-1)(-\lambda)+(-\lambda)+(\lambda-1))\\&=-\gamma^2(\lambda^2-\lambda+1)\end{aligned}$$

と計算される．同様にして

$$\alpha\beta\gamma=\gamma^3\lambda(1-\lambda)$$

である．したがって，不変有理式は

$$\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3}{(\alpha\beta\gamma)^2}=-\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$$

となる．これは $\widetilde{G}$ で不変な (分母分子が最小次数の) 有理式である．

定義 9.34 複比を $\lambda=\mathrm{cr}(p_1,p_2;p_3,p_4)$ と書くとき

$$j=j(p_1,p_2,p_3,p_4)=2^8\cdot\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$$

と置いて，これを j **不変量**と呼ぶ．

複素平面上の 4 点の順序を付けない配置から，その 4 点で分岐する $\mathbb{P}^1$ の二重被覆 (= **楕円曲線**) が得られる．これは要するに複素関数

$$f(x)=\sqrt{(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)(x-z_4)}$$

のリーマン面を考えることに他ならない (演習 8.26 参照)．楕円曲線は 4 つの分岐点が射影変換で移り合うときにのみ同型となるから，j 不変量は楕円曲線の不変量となっているはずである．これを具体的に書き下してみよう．そのため

にワイエルシュトラスの標準形を使うことにする[19]．つまり，任意の楕円曲線は次の方程式で定義される射影曲線と同型である (定理 8.21 参照)．

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3). \tag{9.21}$$

ただし右辺の 3 次式は重根を持たないとする．このとき 4 つの分岐点は

$$p_1 = [\varepsilon_1 : 1], \quad p_2 = [\varepsilon_2 : 1], \quad p_3 = [\varepsilon_3 : 1], \quad p_4 = [1:0] = \infty$$

となっており，j 不変量を定義したときに用いた記号 α, β, γ を再び用いると

$$\alpha = D_{12}D_{34} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1,$$

$$\beta = D_{13}D_{42} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \quad \gamma = D_{14}D_{23} = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$$

と計算できる．したがって，

$$j = -2^8 \frac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^3}{(\alpha\beta\gamma)^2} = -2^8 \frac{\left(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 - (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)\right)^3}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

ここでワイエルシュトラスの標準形では $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ であったことを思い出し，また 3 次式 (9.21) の判別式 $D = 4^4(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2$ を用いると

$$j = -2^8 \frac{4^4 \cdot 27(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1)^3}{D} = -2^8 \frac{4^4 \cdot 27(-g_2/4)^3}{D}$$

となる．例 3.26 の計算から

$$D = 4^4\left(4(g_2/4)^3 - 27(g_3/4)^2\right) = 4^2(g_2^3 - 27g_3^2)$$

であるから

$$j = 2^8 \frac{27g_2^3}{4(g_2^3 - 27g_3^2)} = \frac{1728\, g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

と計算できる．

定理 9.35 ワイエルシュトラスの標準形 (9.21) で与えられた楕円曲線の同型類の不変量として

$$j = \frac{1728\, g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

を取ることができる．

---

19) Weierstrass, Karl (1815–1897).

注意 9.36　よく知られているように j は完全である．つまり楕円曲線の同型類は j の値によって類別できる．ワイエルストラスの標準形は $\wp$ 函数によって決まり，その $\wp$ 函数は格子 $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ によって決まっていた．しかし，楕円曲線の同型類は $\omega = \omega_1/\omega_2 \in \mathfrak{H}$ のみによる．したがって j は $\omega \in \mathfrak{H}$ の関数である．ここで $q = e^{2\pi i\omega}$ と置くと，$j(q)$ は $q = 1$ で極を持つが，この極における留数を 1 に正規化するための定数が 1728 である（[12, § 3.3] 参照）．定義 9.34 において 2^8 を掛けて定数を調整した理由はここにある．

第 10 章　射影空間とグラスマン多様体

前章では一般の射影空間を導入したが，ほとんどの話は射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の幾何学に関するものであった．複素射影直線は "直線" とは呼ばれているものの，実次元が 2 であって豊富な内容を持っている．この複素射影直線の場合でもまだいろいろと語り足りない部分があるが，そろそろ高次元の射影空間に足を踏み入れる潮時がきたようである．

この章では射影空間における幾何学の一番簡単な例として，射影空間における 2 次曲線と点の配置問題，そして射影部分空間のなすグラスマン多様体などを紹介する．

10.1　n 次元射影空間

§9.1 では n 次元の複素射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ を導入して，斉次座標 (連比) や，$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ が商空間 $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$ とみなせることを紹介した．この節では，復習をかねて $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ が等質空間として表されることをまず述べよう．

射影空間の点は $v = {}^t(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ $(v \neq 0)$ に対して，その斉次座標

$$[v] = [z_0 : z_1 : \cdots : z_n]$$

で表されるのであった．斉次座標は定数倍しても変わらないので，これはとりもなおさず $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上の点が $\mathbb{C}^{n+1}$ における原点を通る直線，つまり $\mathbb{C}^{n+1}$ の 1 次元部分空間と一対一に対応していることを意味している．

一般線型群 $G = \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ に通常の行列の掛け算で作用しており 1 次元部分空間を 1 次元部分空間に写す．一般に 1 次元部分空間はゼロでないベクトル $v \neq 0$ を用いて $\mathbb{C}v$ の形に表されるから，G の作用を数式で書くと

$$g \cdot (\mathbb{C}v) = \mathbb{C}(gv) \quad (g \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C}),\ v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$$

である．これは斉次座標を用いて書くと $\pi_g([v]) = [gv]$ と表され，射影変換としての作用に他ならないことが分かる．

補題 10.1　$G = \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ の射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ への作用は推移的である．

証明　射影空間の点として $[e_1]$ を取ろう．ここで e_i は第 i 成分が 1 で他の成分はゼロの基本ベクトルである．この $[e_1]$ を任意の点 $[v]$ に写すような G の元があることを示せばよい．もちろん $v \neq 0$ だから，$v_1 = v$ から始めて $\mathbb{C}^{n+1}$ の基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\}$ を取ることができる．この基底を並べた $(n+1)$ 次の正方行列を $g = (v_1, v_2, \ldots, v_{n+1})$ としよう．この行列は基底を並べて作ったので正則であり，したがって G の元である．

一般に $g \in G$ に対して ge_1 は $(n+1)$ 次正方行列 g の第 1 列目のベクトルを表すから，今の場合は $ge_1 = v_1 = v$ である．つまり $\pi_g([e_1]) = [ge_1] = [v]$ であって，G の作用により $[e_1]$ は $[v]$ に移ることが分かった．■

G が推移的に作用しているので $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ は等質空間であって $x = [e_1]$ の固定部分群を G_x と書くと $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \simeq G/G_x$ が成り立つ．そこで G_x を具体的に計算してみよう．上の補題の証明より

$$g[e_1] = [e_1] \iff ge_1 = \lambda e_1 \quad (\lambda \in \mathbb{C}^\times)$$

が分かる．つまり，行列 g の第 1 列目は ${}^t(\lambda, 0, \ldots, 0)$ の形をしていなければならないが，これが $g \in G_x$ であるための条件であるから固定部分群は

$$G_x = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \lambda & u_1 \ \ldots \ u_n \\ \hline 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{array} \right) \middle| \ \lambda \in \mathbb{C}^\times, A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \right\} \tag{10.1}$$

と表すことができる．この部分群を $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ の $(1, n)$ 型**放物型部分群**と呼び，記号で $P_{(1,n)}$ と書く．以上の考察をまとめると次の定理を得る．

定理 10.2　射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ は $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ の等質空間であって，$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})/P_{(1,n)}$ と表される．

この定理では一般線型群を用いたが，射影空間はユニタリ群を使っても等質空間として実現することができる．ここでユニタリ群 $\mathrm{U}_N(\mathbb{C})$ は

$$\mathrm{U}_N(\mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{C}) \mid g^* \cdot g = g \cdot g^* = 1_N\}$$

で定義されるのであった．ただし $g^* = {}^t\overline{g}$ は N 次正方行列 g の各成分の複素共役を取り，転置をしたものである．g の第 j 列ベクトルを $v_j \in \mathbb{C}^N$ として，$g = (v_1, \ldots, v_N)$ と書いておくと $g^* \cdot g$ の第 (i,j) 成分は ${}^t\overline{v_i}\, v_j$ である．一方 $a, b \in \mathbb{C}^N$ に対して，

$$
{}^t\overline{a}\, b = (\overline{a_1}, \cdots, \overline{a_N}) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \overline{a_k}\, b_k
$$

なので[1]，${}^t\overline{a}\, b$ はベクトル a と b のエルミート内積 $\langle a, b \rangle$ を表している．したがって g がユニタリであることを言い換えれば $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ (クロネッカーの δ) であるから，つまり $\{v_1, \ldots, v_N\}$ が $\mathbb{C}^N$ の正規直交基底であることを意味する．

補題 10.3 ユニタリ群 $\mathrm{U}_N(\mathbb{C})$ は一般線型群 $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ のコンパクトな部分群である．

証明 N 次エルミート対称行列の全体を

$$
\mathrm{Her}_N = \{A \in \mathrm{M}_N(\mathbb{C}) \mid A^* = A\}
$$

と書くことにしよう．すると $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ は $\mathrm{Her}_N(\mathbb{C})$ に $A \mapsto gAg^*$ で働く．このとき単位行列 $A = 1_N$ の固定部分群がちょうど $\mathrm{U}_N(\mathbb{C})$ であり，確かに部分群になっている．

コンパクトであることを示すには，N 次正方行列の各成分が複素数であって，それは $\mathbb{R}^2$ とみなすことができるから，$\mathbb{R}^{2N^2}$ の部分集合として $\mathrm{U}_N(\mathbb{C})$ が有界閉集合になることを示せばよい (附録の補題 A.5 参照)．まずユニタリ行列の定義式 $g^* \cdot g = 1_N = g \cdot g^*$ は g の各成分の実部・虚部の多項式連立方程式として書けるので，方程式の解集合として閉である．次に，例えば (i,j) 成分 g_{ij} は第 j 列目に現れるが，第 j 列目は長さが 1 の単位ベクトルでなければならないから，もちろん $|g_{ij}| \leq 1$ である．これは $\mathrm{U}_N(\mathbb{C})$ が有界であることを示している． ∎

$\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{C})$ は $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ の部分群であるから，もちろん射影変換として $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ に作用している．実はこの作用は推移的である．

---

1) ここで $a = {}^t(a_1, \ldots, a_N)$ は $a \in \mathbb{C}^N$ の成分による表示で $a_k \in \mathbb{C}$ は a の第 k 成分を表している．一方 $v_j \in \mathbb{C}^N$ は第 j 番目のベクトルを表している．記号が少々紛らわしいがお許しいただきたい．

定理 10.4　ユニタリ群 $\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{C})$ の射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ への作用は推移的であり，その固定部分群は $\mathrm{U}_1(\mathbb{C})\times\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ に同型である．したがって射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ は等質空間として $\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{C})\,/\,(\mathrm{U}_1(\mathbb{C})\times\mathrm{U}_n(\mathbb{C}))$ に同型である．

証明　まずユニタリ群 $\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{C})$ の作用が推移的であることを示そう．それには $[e_1]\in\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ が $\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{C})$ の作用で任意の点に写されることを示せばよい．ここで $e_1={}^t(1,0,\dots,0)$ は基本ベクトルである．射影空間の任意の点 $[v]$ ($v\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$) を取る．$v$ を定数倍しても同じ点の斉次座標を与えるから，v の代わりに $\dfrac{1}{\|v\|}v$ を考えることで，最初から $\|v\|=1$ としてよい．ここで $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$ はエルミート内積から決まった v のノルムである．このとき $v_1=v$ から始めて正規直交基底を選んで[2]それを $\{v_1,v_2,\dots,v_{n+1}\}$ とし，g をこの基底を並べてできる行列とする．すると

$$g^*\cdot g=\begin{pmatrix}{}^t\overline{v_1}\\ \vdots\\ {}^t\overline{v_{n+1}}\end{pmatrix}(v_1,\dots,v_{n+1})=\Big(\langle v_i,v_j\rangle\Big)_{1\le i,j\le n+1}=1_{n+1}$$

である．最後の等式は $\{v_1,\dots,v_{n+1}\}$ が正規直交基底なので $\langle v_i,v_j\rangle=\delta_{ij}$ となることから従う．つまり $g^*=g^{-1}$ であるから $g\cdot g^*=1_{n+1}$ も従う．これは $g\in\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{C})$ を意味している．このとき $ge_1=v_1=v$ なので $\pi_g([e_1])=[ge_1]=[v]$ である．以上で $\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{C})\curvearrowright\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ が推移的であることが分かった．

次に $x=[e_1]$ における固定部分群を計算してみよう．そこで $\pi_g([e_1])=[e_1]$ が成り立つとすると，$ge_1=v_1$ は g の第 1 列目であるから $v_1=\lambda e_1$ ($\lambda\in\mathbb{C}^\times$) であることが分かる．射影空間の点に対する斉次座標では常に定数倍の差がつきまとうことに注意しよう．このとき $\|v_1\|=1$ であるから $|\lambda|=1$ でなければならない．よって $\lambda=e^{i\theta}$ ($\theta\in\mathbb{R}$) と表すことができる．一方，g の第 j 列 v_j を取ってくると $j>1$ ならば $\langle v_1,v_j\rangle=0$ なので，v_j の第 1 成分はゼロである．これより

$$g=\left(\begin{array}{c|c} e^{i\theta} & 0\ \dots\ 0\\ \hline 0 & \\ \vdots & h\\ 0 & \end{array}\right)\quad(\theta\in\mathbb{R},\,h\in\mathrm{U}_n(\mathbb{C}))$$

---

[2] Gramm-Schmidt の直交化によって正規直交基底は任意の単位ベクトルから始めて構成できる．

の形であることが分かる．したがって $x=[e_1]$ の固定部分群は $\mathrm{U}_1(\mathbb{C})\times\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ を対角的に $\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{C})$ に埋め込んだものである．これより等質空間として

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\simeq\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{C})\,/\,(\mathrm{U}_1(\mathbb{C})\times\mathrm{U}_n(\mathbb{C}))$$

が成り立つ． ∎

系 10.5　射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ はコンパクトである．

証明　上の定理より，連続な商写像 $\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{C})\to\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ が存在するが，ユニタリ群 $\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{C})$ はコンパクトなので，その連続像として $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ もコンパクトである (附録の補題 A.6 参照). ∎

ユニタリ群 $\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{C})$ は複素構造を持たない実リー群であるが，その等質空間である $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ は複素多様体である．また固定部分群 $\mathrm{U}_1(\mathbb{C})\times\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ は $\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{C})$ の包含的自己同型の固定点集合になっているので，このようなとき $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\simeq\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{C})/(\mathrm{U}_1(\mathbb{C})\times\mathrm{U}_n(\mathbb{C}))$ をコンパクト・エルミート対称空間と呼ぶ．このような例は既に例 9.8 で体験済みである．そのときには $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の開集合である上半空間 $\mathfrak{H}$ が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ の形に表されてエルミート対称空間であることが分かったのであった．しかし上半空間はコンパクトでない[3]ので，コンパクトなエルミート対称空間の例は本書ではこれが最初である．

演習 10.6　位数 2 の自己同型を包含的自己同型という．

(1) $I_{1,n}=\mathrm{diag}(1,-1_n)$ とおくとき，$\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{C})$ の包含的自己同型 σ が $\sigma(g)=I_{1,n}\,g\,I_{1,n}^{-1}$ で定まることを示せ．

(2) σ の固定部分群が $\mathrm{U}_1(\mathbb{C})\times\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ であることを示せ．

(3) $I_{1,n}$ の代わりに $I_{p,q}=\mathrm{diag}(1_p,-1_q)$ $(p+q=n+1)$ とするとどうか?

10.2　2 次曲面と点の配置空間

射影空間の中で 2 次斉次式で定義されるような超曲面を 2 次超曲面という．以下，これを単に 2 次曲面と呼ぼう．2 次曲面の定義式は $(n+1)$ 次の対称行列 $S\in\mathrm{Sym}_{n+1}(\mathbb{C})$ を用いて ${}^t xSx=0$ と表すことができる．ここで $x={}^t(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ は点 $[x]$ の斉次座標である．このとき 2 次曲面が退化しないた

---

[3] 複素平面，つまり $\mathbb{R}^2$ における非有界開集合であるからコンパクトでない．附録の補題 A.5 参照.

めには $\det S \neq 0$ が必要である．そこでこの節では，S を正則な $(n+1)$ 次対称行列として，2 次曲面 ${}^t xSx = 0$ と m 点の配置について考えてみよう．

m 点 $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の斉次座標をそれぞれ $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}^{n+1}$ とし，これらのベクトルを並べてできる $(n+1) \times m$ 行列を $A = (a_1, \ldots, a_m)$ と書く．A の階数が行または列の数と一致するときに A を**最大階数の行列**[4]というが，$(n+1) \times m$ 行列全体のなすベクトル空間 $\mathrm{M}_{n+1,m}(\mathbb{C})$ において最大階数の行列全体のなす部分集合を $\mathrm{M}^\circ_{n+1,m}(\mathbb{C})$ と表そう．また非退化 2 次曲面を表す正則な対称行列の全体を $\mathrm{Sym}^\circ_{n+1}(\mathbb{C})$ で表す．

以下 $m \leq n$ と仮定する[5]．この仮定の下に $A \in \mathrm{M}^\circ_{n+1,m}(\mathbb{C})$ であることと，m 点 $p_1 = [a_1], \ldots, p_m = [a_m]$ が一般の位置にあることは同値である．

射影空間には既に何度も説明しているように射影変換群が働いており，射影幾何学においては射影変換群によって写りあうものを “同じ” とみなす．そこで，この節では 2 次曲面と点の配置の空間における射影変換群の軌道を調べよう．そのために $\mathrm{Sym}^\circ_{n+1}(\mathbb{C})$ や $\mathrm{M}^\circ_{n+1,m}(\mathbb{C})$ にどのように射影変換が働くのかを確認しておく．

まず 2 次曲面 ${}^t xSx = 0$ 上の点 $[x]$ を取り，これを $g \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ による射影変換で写すと $\pi_g([x]) = [gx]$ であるから，$y = gx$ と置いて

$$0 = {}^t xSx = {}^t(gx)\,{}^t g^{-1} S g^{-1} (gx) = {}^t y({}^t g^{-1} S g^{-1}) y$$

となる．したがって写した点 $[y]$ が満たす 2 次式は ${}^t y({}^t g^{-1} S g^{-1}) y = 0$ であって，対応する対称行列は ${}^t g^{-1} S g^{-1}$ である．これが $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ の，対称行列の空間 $\mathrm{Sym}^\circ_{n+1}(\mathbb{C})$ への作用である．

一方 m 点集合に対しては各点に射影変換 π_g を施すことになり，これは行列 $A \in \mathrm{M}^\circ_{n+1,m}(\mathbb{C})$ の各列に g を掛けることと同じである．つまり射影変換で写した m 点を表す行列は gA である．

以上をまとめると，射影変換群の 2 次曲面を表す行列 S および m 点を表す行列 A への $g \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ の作用は

---

[4] full rank matrix の訳．あまり定着しているとは言えないが他によい訳が見当たらない．

[5] この仮定は以下の議論を修整すれば $m \leq n+1$ まで弱めてもよいが，ここでは簡単のため $m \leq n$ とする．

$$\rho(g)(S,A) = ({}^t g^{-1} S g^{-1}, gA),\ (S,A) \in \mathrm{Sym}^\circ_{n+1}(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}^\circ_{n+1,m}(\mathbb{C}) \qquad (10.2)$$

で与えられることになる．

行列 A は m 点の斉次座標を表していた．いま，A は最大階数の行列であり，仮定より $m \leq n$ だから A の各列はゼロベクトルではない．これはどの点の斉次座標もゼロではないことと呼応している．一方，斉次座標はスカラー倍しても同じ射影空間の点を表すから A の各列はスカラー倍しても同じものとみなさねばならない．そのために m 次元トーラス群 $T^m = (\mathbb{C}^\times)^m$ を各列に作用させてその軌道を考える必要がある．m 次一般線型群 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ は $\mathrm{M}^\circ_{n+1,m}(\mathbb{C})$ に右からの積で作用するが，T^m を $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ の対角行列からなるトーラス群と同一視して考えると，対角行列 $t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_m)$ を A に右から掛けることは第 j 列を t_j 倍することにあたるからちょうど都合が良い (§9.7 参照).

このようにして得られた $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) \times T^m$ の $\mathrm{Sym}^\circ_{n+1}(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}^\circ_{n+1,m}(\mathbb{C})$ への作用による商空間

$$\Bigl(\mathrm{Sym}^\circ_{n+1}(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}^\circ_{n+1,m}(\mathbb{C})\Bigr) \Big/ \Bigl(\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) \times T^m\Bigr) \qquad (10.3)$$

が非退化 2 次曲面と $\mathbb{P}^n$ の m 点配置を記述する空間である．

定理 10.7　一般線型群 $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ の $\mathrm{Sym}^\circ_{n+1}(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}^\circ_{n+1,m}(\mathbb{C})$ への作用 (10.2) を考える．

(1) この作用に関する不変式環は関数

$$\Delta_{ij}(S,A) = ({}^t ASA)_{ij} \quad (1 \leq i,j \leq m)$$

によって生成される．ただし右辺は ${}^t ASA$ の (i,j) 成分を表している．

(2) 指標が $(\det g)^{-k}$ の相対不変式は $k \in \mathbb{Z}$ が偶数のときには

$$F(S,A) = (\det S)^{k/2} P(\Delta_{ij}) \quad (P(\Delta_{ij}) \text{ は } \{\Delta_{ij}\} \text{ の多項式})$$

の形に表される．k が奇数のときには非自明な相対不変式は存在しない．

証明　この証明では行列 X の (i,j) 成分を X_{ij} のように書くことにする．

(1) Δ_{ij} が $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ の作用に関して不変式になることは

$$\Delta_{ij}({}^t g^{-1} S g^{-1}, gA) = ({}^t(gA)({}^t g^{-1} S g^{-1}) gA)_{ij} = ({}^t ASA)_{ij}$$

より確かめられる．

これらが生成系になることは，表現論を用いないと証明することが難しい．そ

こで以下表現論の知識を仮定した上で証明の概略を与えるが，不慣れな読者は以下の証明をとばして先に進む方がよい．

まず $\mathrm{Sym}^\circ_{n+1}(\mathbb{C})$ 上の多項式関数の空間は $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ 加群として

$$\mathbb{C}[\mathrm{Sym}^\circ_{n+1}(\mathbb{C})] \simeq \bigoplus\nolimits_{\mu\in\Lambda^{(n+1)}} F^{(n+1)}_{2\mu}$$

と分解することが知られている[6]．ただし

$$\Lambda^{(N)} = \{\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_N)\in\mathbb{Z}^N \mid \lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_N\}$$

は $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ の優整ウェイトの全体であって $F^{(N)}_\lambda$ は $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ の最高ウェイトが λ である既約有限次元表現である．また $\mathrm{M}^\circ_{n+1,m}(\mathbb{C})$ 上の多項式環は $\mathrm{M}_{n+1,m}(\mathbb{C})$ 上の多項式環と一致し[7]，$\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})\times\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ 加群としての分解は

$$\mathbb{C}[\mathrm{M}^\circ_{n+1,m}(\mathbb{C})] \simeq \bigoplus\nolimits_{\lambda\in\Lambda^{(m)}_{\geq 0}} (F^{(n+1)}_\lambda)^*\otimes(F^{(m)}_\lambda)^*$$

で与えられる (§9.7 参照)．ただし $\Lambda^{(m)}_{\geq 0} = \{\lambda\in\Lambda^{(m)} \mid \lambda_m\geq 0\}$ である．したがって $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ 不変式を取ると $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ の作用が残り，$\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ 加群として，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{C}[\mathrm{Sym}^\circ_{n+1}(\mathbb{C})\times\mathrm{M}^\circ_{n+1,m}(\mathbb{C})]^{\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})}\\
&= \Big(\mathbb{C}[\mathrm{Sym}^\circ_{n+1}(\mathbb{C})]\otimes\mathbb{C}[\mathrm{M}^\circ_{n+1,m}(\mathbb{C})]\Big)^{\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})}\\
&\simeq \bigoplus_{\mu\in\Lambda^{(n+1)}}\ \bigoplus_{\lambda\in\Lambda^{(m)}_{\geq 0}} \Big(F^{(n+1)}_{2\mu}\otimes(F^{(n+1)}_\lambda)^*\Big)^{\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})}\otimes(F^{(m)}_\lambda)^*\\
&\simeq \bigoplus_{2\lambda\in\Lambda^{(m)}_{\geq 0}} (F^{(m)}_{2\lambda})^* \simeq \mathbb{C}[\mathrm{Sym}_m(\mathbb{C})]
\end{aligned}$$

である．最後の $\mathrm{Sym}_m(\mathbb{C})$ の空間はちょうど $\{\Delta_{ij}\}$ を座標関数に持っており，任意の不変式はこれら座標関数の多項式である．

(2) 相対不変式は $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ の 1 次元表現を指標に持つが，それは整数 $k\in\mathbb{Z}$ に対して $(\det g)^{-k}$ $(g\in\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C}))$ の形をしており，既約最高ウェイト表現の記号を用いて $F^{(n+1)}_{(-k,-k,\ldots,-k)}$ と表すこともできる．不変式の計算と同様にして

[6] 例えば [27, § 7], [4, § 3] 参照.

[7] これは $\mathrm{codim}(\mathrm{M}_{n+1,m}(\mathbb{C})\setminus\mathrm{M}^\circ_{n+1,m}(\mathbb{C}))\geq 2$ であることによる.

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}[\mathrm{Sym}^\circ_{n+1}(\mathbb{C})\times \mathrm{M}^\circ_{n+1,m}(\mathbb{C})]\\&\qquad\simeq \bigoplus_{\mu\in\Lambda^{(n+1)}}\bigoplus_{\lambda\in\Lambda^{(m)}_{\geq 0}}(F^{(n+1)}_{2\mu}\otimes(F^{(n+1)}_{\lambda})^*)\otimes(F^{(m)}_{\lambda})^*\end{aligned}$$

であるが，このうち指標 $(\det g)^{-k}$ に従う表現は

$$((F^{(n+1)}_{(-k,-k,\dots,-k)})^*\otimes F^{(n+1)}_{2\mu}\otimes(F^{(n+1)}_{\lambda})^*)^{\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})}$$

に対応して現れる．これは

$$2\mu+(k,k,\dots,k)-\lambda=0$$

のときにのみ可能だが $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_m,0,\dots,0)$ であることに注意すると，k は偶数でなければならない．一方 $\det S$ は $\det({}^tg^{-1}Sg^{-1})=(\det g)^{-2}\det S$ より，指標 $(\det g)^{-2}$ を持つ相対不変式である．そこで指標 $(\det g)^{-k}$ を持つ相対不変式を $F(S,A)$ と置くと，$(\det S)^{-k/2}F(S,A)$ は $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ 不変式である．これと (1) より結論が従う． ∎

さて，あとはトーラス T^m の作用による相対不変式を求めて，同じ指標に属する相対不変式の比として不変有理式を導けばよい．しかし，これを一般的に行うには少し骨が折れるので，以下 $m=2$ で n が十分大きい場合を考えよう．

定理 10.8　$m=2$ とする．$\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})\times T^2$ の $\mathrm{Sym}^\circ_{n+1}(\mathbb{C})\times\mathrm{M}^\circ_{n+1,2}(\mathbb{C})$ への作用 (10.2) に関する不変有理式環は

$$\frac{\Delta_{11}\cdot\Delta_{22}}{(\Delta_{12})^2}$$

によって生成される．

証明　不変有理式は相対不変式の比で表されるが，定理 10.7 によってそれは結局 $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ 不変式の比になる．

一方 $t=(t_1,t_2)\in T^2$ の作用による相対不変式を考えると，不変式の生成元に対しては

$$\rho(t^{-1})\Delta_{ij}(S,A)=\Delta_{ij}(S,At)=(t\,{}^tASAt)_{ij}=t_it_j\Delta_{ij}(S,A)$$

となるから，単項式 $\Delta_{11}^p\Delta_{22}^q\Delta_{12}^r$ に付随する T^2 の指標は $t_1^{2p+r}t_2^{2q+r}$ であることが分かる．

$\omega=\Delta_{11}\Delta_{22}/\Delta_{12}^2$ と置くと ω は不変有理式で $\Delta_{12}^2=\Delta_{11}\Delta_{22}\omega^{-1}$ である．したがって $\Delta_{11},\Delta_{22},\Delta_{12}$ の多項式は，Δ_{12}^2 を $\Delta_{11}\Delta_{22}\omega^{-1}$ で置き換えてゆく

と，最後には ω の有理式を係数に持つ $\varDelta_{11}, \varDelta_{22}$ の 多項式と $\varDelta_{12}$ の一次の因子を持つ多項式の和に書ける．このとき係数である ω の有理式を乗ずることを除いて考えれば，指標 $t_1^{2p}t_2^{2q}$ を持つ単項式は $\varDelta_{11}^p\varDelta_{22}^q$ のみであり，指標 $t_1^{2p+1}t_2^{2q+1}$ を持つ単項式は $\varDelta_{11}^p\varDelta_{22}^q\varDelta_{12}$ のみである．これらは指標によって決まってしまうので，同じ指標を持つ $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ 不変式の比を取ると ω の有理式のみが残る． ∎

この定理を幾何的に言い換えてみると次のようになる．2 次曲面を定義する 2 次形式 $Q_S(v) = {}^t vSv$ に付随する対称双線型形式を $q_S(u,v) = {}^t uSv$ とする．また 2 次曲面を C_S と書き，2 点を $p_1 = [v_1], p_2 = [v_2]$ としよう．このとき C_S, p_1, p_2 の射影変換群による軌道においては

$$\frac{q_S(v_1,v_1)\,q_S(v_2,v_2)}{q_S(v_1,v_2)^2} = (\text{一定})$$

が成り立つ．このような関係式は本質的にこれで尽きるというのが定理 10.8 の内容である．

このとき $\lambda \neq 0$ に対して

$$\mathbb{O}_\lambda = \left\{ (S, v_1, v_2) \;\middle|\; \frac{q_S(v_1,v_1)\,q_S(v_2,v_2)}{q_S(v_1,v_2)^2} = \lambda \right\}$$

と置くと，$\mathbb{O}_\lambda$ が実は $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ の作用によってただ 1 つの軌道になっていることが Witt の定理[8]から分かる．つまり不変有理式 $\varDelta_{11}\varDelta_{22}/\varDelta_{12}^2$ の値はほとんどすべての軌道を特徴付けている．問題は $\varDelta_{ij} = 0$ となっている場合であるが，この集合がどのような軌道分解を持つのかは $m = 2$ の場合でも複雑である．

10.3 グラスマン多様体

射影空間内の点と 2 次曲線については述べたが，実際のところ，点の次に簡単な幾何学的対象は直線だし，その次に簡単なのは平面であろう．この節ではそのような幾何学的に単純な図形同士の関係を見てみよう．

$V = \mathbb{C}^n$ と置く．また，射影空間を $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{P}(V)$ と同一視して考えることにしよう．ただし前節までと比べると 1 つ次元が落ちていることに注意しておく．したがって，例えば $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を n 次正則行列のなす一般線型群，

[8] Witt, Ernst (1911–1991). Witt の定理については [12] を参照のこと．

$P_{(1,n-1)}$ を対角ブロックのサイズが $1, (n-1)$ の放物型部分群[9]とすると

$$\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \simeq G/P_{(1,n-1)}$$

と表されるのであった.

射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ において d 個の一般の位置にある点 $p_1 = [v_1], \ldots, p_d = [v_d]$ を取る (§9.2 参照). ここで $v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{C}^n = V$ であるが, 一般の点を取ったので $\{v_1, \ldots, v_d\}$ は一次独立である. $W = \langle v_1, \ldots, v_d \rangle$ を $v_1, \ldots, v_d$ で生成された V の d 次元部分空間とするとき

$$\mathbb{P}(W) = \{[w] \mid w \in W\} \subset \mathbb{P}(V)$$

を点 $p_1 = [v_1], \ldots, p_d = [v_d]$ が生成する $\mathbb{P}(V)$ の $(d-1)$ 次元**部分空間**という. 例えば, $d=2$ なら $\mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(W_{v_1,v_2})$ は射影直線を表すのであった[10]. この射影直線を記号で L_{p_1,p_2} と書く (あるいは L_{v_1,v_2} とも書く).

もう 1 本の射影直線 L_{q_1,q_2} を任意に取ろう. ただし $q_1 = [u_1], q_2 = [u_2]$ ($u_1, u_2 \in V$) である. このとき射影直線 $L_{p_1,p_2} = \mathbb{P}(W_{v_1,v_2})$ と $L_{q_1,q_2} = \mathbb{P}(W_{u_1,u_2})$ は射影変換群の作用で互いに写りあう.

もっと一般に, 次の定理が成り立つ.

定理 10.9 $V = \mathbb{C}^n$ として, 射影空間 $\mathbb{P}(V)$ に含まれる $(d-1)$ 次元の射影部分空間の全体 $\mathscr{W} = \{\mathbb{P}(W_{v_1,\ldots,v_d}) \mid v_1, \ldots, v_d \in V\}$ を考える. 一般線型群 $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は射影変換として $\mathscr{W}$ に働くが, この作用は推移的である.

証明 2 つの射影部分空間 $\mathbb{P}(W_{v_1,\ldots,v_d})$ と $\mathbb{P}(W_{u_1,\ldots,u_d})$ ($u_1, \ldots, u_d \in V$) を取る. ベクトル $v_1, \ldots, v_d \in V$ が一次独立なので, この d 個のベクトルから始めて V の基底を取り, それを $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする. 同様に $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ も V の基底とすると, これらの基底を並べてできる行列は共に正則行列である. このとき

$$g = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n)^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

と置くと, $g \cdot W_{v_1,\ldots,v_d} = W_{u_1,\ldots,u_d}$ が成り立ち, 射影変換 π_g は射影部分空間 $\mathbb{P}(W_{v_1,\ldots,v_d})$ を射影部分空間 $\mathbb{P}(W_{u_1,\ldots,u_d})$ に写す. ∎

---

9) 式 (10.1) 参照.

10) 式 (9.3) を参照のこと.

この定理の証明を見れば分かるように，一般線型群はベクトル空間 V の d 次元の部分ベクトル空間の集合に推移的に働いている．また V の d 次元部分ベクトル空間 W と射影部分空間 $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ は一対一に対応している．

定義 10.10　n 次元ベクトル空間 V の d 次元部分ベクトル空間の全体を $\mathrm{Gr}_d(V)$ または $\mathrm{Gr}_d^n(\mathbb{C})$ で表し，**グラスマン多様体**と呼ぶ[11]．特に $d=1$ のとき $\mathrm{Gr}_1(V)=\mathbb{P}(V)$ は $(n-1)$ 次元の射影空間に他ならない．

標準基底からなる部分ベクトル空間 $W_{\mathrm{std}}=\langle e_1,\ldots,e_d\rangle$ を取り，この部分空間の固定部分群

$$P(W_{\mathrm{std}})=\{g\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\mid g\cdot W_{\mathrm{std}}=W_{\mathrm{std}}\}$$

を考えよう．これは $1\le j\le d$ に対して $g\cdot e_j\in W_{\mathrm{std}}$ が成り立つことと同値であるから $g\cdot e_j$ が行列 g の第 j 行目であることを考えあわせると

$$P(W_{\mathrm{std}})=\left\{g\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\;\middle|\;\begin{array}{l} g=\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D\end{array}\right), \\ A\in\mathrm{GL}_d(\mathbb{C}),\, D\in\mathrm{GL}_{n-d}(\mathbb{C}),\, B\in\mathrm{M}_{d,n-d}(\mathbb{C})\end{array}\right\}$$

の形をしていることが分かる．ただし行列 g の左下隅の 0 はサイズが $(n-d)\times d$ の零行列を表している．このような部分群を $(d,n-d)$ 型の**放物型部分群**と呼び，対角線のブロックのサイズを用いて $P_{(d,n-d)}$ と表す．

一般線型群 $\mathrm{GL}(V)=\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は $\mathrm{Gr}_d(V)$ に推移的に作用しており，ベクトル空間 W_{std} の固定部分群は $P_{(d,n-d)}$ なので，等質空間 $\mathrm{GL}(V)/P_{(d,n-d)}$ から $\mathrm{Gr}_d(V)$ への全単射が存在する．もともとグラスマン多様体は $(d-1)$ 次元の射影部分空間を集めたものであり，その多様体の構造はおろか，位相空間としての構造をどう決めるべきかさえ明らかではない．しかし，等質空間 $\mathrm{GL}(V)/P_{(d,n-d)}$ の方はその複素多様体としての構造が (リー群論より) よく分かっている．そこで $\mathrm{Gr}_d(V)$ に複素多様体 (あるいは位相空間) の構造をこの全単射を利用して入れることにしよう．つまりグラスマン多様体は，多様体として等質空間 $\mathrm{GL}(V)/P_{(d,n-d)}$ と同一視される．

定理 10.4 と同様に考えれば，次の定理を証明できる．

定理 10.11　$V=\mathbb{C}^n$ とする．ユニタリ群 $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ はグラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_d(V)$

[11] Grassmann, Hermann Günter (1809–1877).

に推移的に作用し，その W_{std} における固定部分群は $\mathrm{U}_d(\mathbb{C})\times\mathrm{U}_{n-d}(\mathbb{C})$ に同型である．したがって $\mathrm{Gr}_d(V)\simeq\mathrm{U}_n(\mathbb{C})\,/\,(\mathrm{U}_d(\mathbb{C})\times\mathrm{U}_{n-d}(\mathbb{C}))$ が成り立ち，特にグラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_d(V)$ はコンパクトなエルミート対称空間である．

10.4 プリュッカー座標

この節までは一般のグラスマン多様体を考えてきたが，ここでは射影空間ではないものの中で一番簡単な例として，$n=4, d=2$ のときにグラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$ を考えてみよう．これは要するに射影空間 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の中の射影直線の全体である．

そこで $v_1, v_2\in\mathbb{C}^4$ を一次独立とし，$W_{v_1,v_2}=\langle v_1,v_2\rangle$ を v_1,v_2 が生成する 2 次元部分空間としよう．$\{v_1,v_2\}$ は W_{v_1,v_2} の基底である．この 2 つの基底を並べて得られる 4×2 行列を $A=(v_1,v_2)$ と置く．

行列 A に対して線型写像

$$A:\mathbb{C}^2\ni\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\mapsto A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=av_1+bv_2\in\mathbb{C}^4$$

を考えると A の像 $\mathrm{Im}\,A$ は列ベクトルの生成する部分空間に一致する．列ベクトルが一次独立なので A は最大階数の行列であるが，行列 $\mathrm{M}_{4,2}(\mathbb{C})$ のうち最大階数の行列がなす部分多様体を $\mathrm{M}^{\circ}_{4,2}(\mathbb{C})$ と書いたことを思い出そう．そこで A に対してその像を対応させる写像を

$$\Phi:\mathrm{M}^{\circ}_{4,2}(\mathbb{C})\to\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4),\quad A\mapsto\mathrm{Im}\,A \tag{10.4}$$

と書くと $\Phi(A)=\mathrm{Im}\,A=W_{v_1,v_2}$ である．

さて，2 次元部分空間 W_{v_1,v_2} には $\{v_1,v_2\}$ 以外にも無数の基底が取れるから，例えば $\{u_1,u_2\}$ を別の基底として $B=(u_1,u_2)\in\mathrm{M}_{4,2}(\mathbb{C})$ と置くと $\Phi(B)=W_{u_1,u_2}=W_{v_1,v_2}=\Phi(A)$ であり，行列 A と B の像は一致する．一方 $W=W_{v_1,v_2}$ の任意の基底はある $p\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ に対して $(u_1,u_2)=(v_1,v_2)\cdot p$ と書くことができる．このとき p を**基底変換の行列**と呼ぶのであった[12)]．つまり

$$\Phi(A\cdot p)=\Phi(A)\quad(A\in\mathrm{M}^{\circ}_{4,2}(\mathbb{C}),\ p\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})) \tag{10.5}$$

が成り立つ．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を $\mathrm{M}^{\circ}_{4,2}(\mathbb{C})$ に右からの掛け算で作用させると，式 (10.5)

---

12) 例えば [40] を参照のこと．

は写像 $\Phi : \mathrm{M}^{\circ}_{4,2}(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$ が矛盾なく定義できることを意味している．これより次の定理が成り立つ．

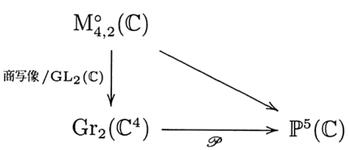
定理 10.12　式 (10.4) で定義された写像 Φ は同型 $\mathrm{M}^{\circ}_{4,2}(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$ を導く．

この定理を利用してグラスマン多様体の高次射影空間への埋め込みを構成する．

行列 $A \in \mathrm{M}_{4,2}(\mathbb{C})$ に対して，その第 i 行目と第 j 行目を取り出してできる 2×2 行列の行列式を $D_{ij}(A)$ と書くことにしよう．A は最大階数の行列なので $D_{ij}(A) \neq 0$ となるような (i,j) が存在することに注意する．そこで $A \in \mathrm{M}^{\circ}_{4,2}(\mathbb{C})$ に対して連比

$$[D_{12}(A) : D_{13}(A) : D_{14}(A) : D_{32}(A) : D_{42}(A) : D_{34}(A)] \in \mathbb{P}^5(\mathbb{C}) \tag{10.6}$$

を対応させる写像 $\mathscr{P}$ を考える[13]．この斉次座標を**プリュッカー座標**と呼ぶ．このとき $p \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ に対して $D_{ij}(A \cdot p) = (\det p) D_{ij}(A)$ であり，斉次座業は定数倍しても同じ射影空間上の点を表すから $\mathscr{P}(A \cdot p) = \mathscr{P}(A)$ である．これは写像 $\mathscr{P} : \mathrm{M}^{\circ}_{4,2}(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ が実は $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4) \simeq \mathrm{M}^{\circ}_{4,2}(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ から $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ への写像であることを意味している．少し紛らわしいが，この写像も同じ記号 $\mathscr{P}$ で表すことにしよう．



プリュッカー座標を構成する関数たち $\{D_{ij}(A)\}_{1 \leq i,j \leq 4}$ は独立ではなく，次のプリュッカーの関係式を満たしていた (定理 9.27 参照)．

$$D_{12}D_{34} + D_{13}D_{42} + D_{14}D_{23} = 0.$$

斉次座標を $[x_0 : x_1 : \cdots : x_5] \in \mathbb{P}^5$ と書くと，式 (10.6) と見比べることによって，この関係式は

$$x_0x_5 + x_1x_4 - x_2x_3 = 0$$

13) 斉次座標のうち第 4, 5 番目の行列式の行番号が逆転しているが，例えば $D_{32}(A) = -D_{23}(A)$ であることに注意．

と書き直すことができる．これは $\mathbb{P}^5$ における 2 次曲面の方程式である．つまり我々は $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$ から $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ 内の 2 次曲面への写像を得たことになる．

定理 10.13　式 (10.6) により定義された写像 $\mathscr{P}:\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4)\to\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ はグラスマン多様体から射影空間 $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ 内の 2 次曲面への同型写像である．この写像 $\mathscr{P}$ をプリュッカー埋め込み写像と呼ぶ．

証明　プリュッカー座標を $\mathscr{P}(A)=[x_0:\cdots:x_5]$ と書いておこう．$D_{12}\neq 0$ のときを考える．このとき $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の作用によって A は

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\z_{11}&z_{12}\\z_{21}&z_{22}\end{pmatrix}$$

の形をしているとして一般性を失わない．するとプリュッカー座標は

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(A)&=[1:z_{12}:z_{22}:z_{11}:z_{21}:z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}]\\&=[x_0:x_1:x_2:x_3:x_4:x_5]\end{aligned}$$

である．したがってこの座標において $x_1,\ldots,x_4$ は全く自由な座標を取りうることが分かる[14)]．プリュッカー関係式は

$$\frac{x_5}{x_0}=\frac{x_2}{x_0}\frac{x_3}{x_0}-\frac{x_1}{x_0}\frac{x_4}{x_0}$$

と書くことができるから，これは 2 次曲面の方程式と全く一致している．したがって $x_0=D_{12}\neq 0$ においては $\mathscr{P}$ の像と 2 次曲面の点は一対一に対応している．他の座標がゼロでないときにも同様に議論できる．∎

このようにして，$\mathbb{P}^3$ における射影直線の全体を考えるとそれはグラスマン多様体となり，より高い次元の射影空間 $\mathbb{P}^5$ における 2 次曲面とみなすことができることが分かった．

10.5　点配置と多重旗多様体

§10.2 では 2 次曲面と点の配置の問題を考えたが，この節ではいくつかの点や射影部分空間の配置問題を考えてみよう．点・直線・平面 ⋯ といった理解しやすい幾何学的な対象ではあるが，これらの間の相対的な位置関係は思ったよ

---

14) x_0 は既に 1 と規格化されている．

り複雑であり，いまだ十分理解されているとは言えない状況である．ましてや 2 次曲面やもっと複雑な図形がいくつかある場合，その配置を詳細に記述することは非常に難しい．

そこでまず射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ におけるいくつかの点の配置に話題を戻してみよう．射影空間における k 個の点の相対的な配置の問題は，要するに射影空間の k 個の直積

$$\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$$

への射影変換群の対角的作用を考え，その軌道を記述することに他ならない．$\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/P_{(1,n-1)}$ であったから，これは次の問題と同じである．

問題 10.14　商空間 $\left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/P_{(1,n-1)}\right)^k \Big/ \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を具体的に記述せよ．これはいつ有限個の点になるか? また次元はいくつであるか?

商空間は必ずしも多様体のようなきれいな形はしていないのでこの問題において“次元”という問いが意味をなすかどうかも分からない．

よく知られているのは $k=2$ の場合で，このときは 2 点の配置であるから，この 2 つの点が相異なる場合と一致する場合の 2 つの場合しかない．もしこれが射影幾何ではなく，例えばユークリッド幾何だったとしたら，2 点間の距離も考慮に入れる必要があるから 2 つの異なる点の相対的な配置は無限にあることになる．しかし射影幾何においてはこのような 2 点は射影変換によって互いに写りあう．それを見るには $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ と書いて，

$$\left((G/P_{(1,n-1)}) \times (G/P_{(1,n-1)})\right) / \, G \simeq P_{(1,n-1)} \backslash G / P_{(1,n-1)}$$

であることに注意すればよい．右辺は放物型部分群による両側剰余類の分解になっているが，これは Bruhat 分解と呼ばれる理論によって常に有限であることが知られており，Weyl 群と呼ばれる有限群の両側剰余類の問題に帰着することができる．今の場合，それは対称群の両側剰余類 $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_{n-1} \backslash \mathfrak{S}_n / \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_{n-1}$ と対応しており，これが 2 個の両側剰余類に分解するのは見やすい．

$k=3$ のときにも商空間は有限になる (つまり軌道が有限個しかない) ことはよく知られている．この場合，軌道は 6 個であり，それに対応する配置も簡単に書き下せる．

- 3 点が一致する場合

- 3 点のうち 2 点が一致する場合 (3 通り)
- 3 点が同一直線上にある場合
- 3 点が一般の位置にある場合

ところが $k=4$ になると，点配置は無限にある．これは例えば 4 点が同一直線上にある場合を考えると，$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の 4 点の配置問題に帰着する．この 4 点配置は複比によって決まるのであったが，複比の値はちょうど $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ だけの自由度があるのでその配置は無限にある．

一方 $k \leq n+1$ ならば，一般の位置にある k 点はすべて射影変換によって写りあう．一般の位置にある点は特殊な配置よりも "一般的" であり，ほとんどすべての点配置は一般である．このような配置は射影変換で写りあうわけであるから，その意味でほとんどの k 点の配置は唯一つしかないことになる．これはグラスマン多様体の直積上に開かつ稠密な $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の軌道が存在することと対応している．$k=4$ の場合に紹介した，軌道が無限にあるような点の配置は 4 点が同一直線上にあるような "特殊な" 配置であることに注意しよう．

しかし $k>n+1$ になるとそれさえも成り立たなくなり，最も一般的な点の配置が射影変換の作用を考慮しても無限に現れてくる．

点配置ではなく，射影部分空間の配置問題であればどうであろうか? それにはグラスマン多様体の直積における G の軌道を考える必要が出てくる．これは

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{Gr}^n_{d_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathrm{Gr}^n_{d_k}(\mathbb{C})\right) \Big/ G \\ &\simeq \left(G/P_{(d_1, n-d_1)} \times \cdots \times G/P_{(d_k, n-d_k)}\right) \Big/ G \qquad (10.7)\end{aligned}$$

を考えることに他ならない．一般に G の**放物型部分群** P による商空間 G/P を**旗多様体**と呼んでいる[15)]．上の空間は旗多様体のいくつかの直積なので**多重旗多様体**と呼ぶ．したがって射影部分空間の配置問題は多重旗多様体上の軌道の問題に置き換えることができる．多重旗多様体上の軌道の分類や有限性は最先端の研究においても一般には未解決であり，とても面白い問題である．

興味を持たれた方は [9], [16], [10] などを参照していただきたい．

---

15) $P \subset G$ が放物型部分群であるとは G/P がコンパクトになるときに言う．つまり旗多様体とはコンパクトな等質空間であると言ってもよい．

附録：集合と写像

この章では，本文を読むのに必要と思われることを読者の便宜のためにまとめておく．そのため，各節は独立に読めるし，内容はそのほとんどが概念の定義や基本的な性質の説明に充てられている．より詳しく学びたい人は随所に掲げておいた参考文献を適宜参照してほしい．

A.1 集合と写像

この節では，集合と写像に関して，本文を読むのに必要な最低限の基礎事項を復習しておこう．そのため，ここでの議論はあまり厳密でもなければ，それほど親切とも言えない．本格的な集合論は，数学の一分野をなすほど豊かで，困難かつ魅惑的な側面を擁している．これらに興味のある読者は，例えば [24], [49], [26] などを参照するとよいだろう．

A.1.1 集合，要素，部分集合

数学的対象の集まりを**集合**と呼ぶ．集合 A を与えることと，ある数学的な対象 a が A に属しているかどうか判定できることは同じである．a が A に属するとき，$a \in A$ または $A \ni a$ と書き，a を A の**要素**あるいは**元**であると言う．集合 X が A の**部分集合**であるとは，$x \in X$ ならば $x \in A$ となるときに言う．このとき $X \subset A$ と書く．$B \subset A$ かつ $A \subset B$ が成り立つとき，A と B は等しいと言って $A = B$ と書く．

また，特別な集合として全く要素を持たない集合も考え，これを**空集合**と呼んで $\varnothing$ で表す．空集合は任意の集合の部分集合 $\varnothing \subset A$ である．

A.1.2 和集合と積集合

集合 X と Y に対して，

$$X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ または } z \in Y\}$$

と置いて，これを X と Y の**和集合**または**合併**という．また

$$X \cap Y = \{z \mid z \in X \text{ かつ } z \in Y\}$$

を X と Y の**積集合**あるいは**共通部分**という．和や積を繰り返すことによって有限個の集合の和や積を定義することができる．例えば

$$A \cap B \cap C \text{ や } A \cup B \cup C \cup D$$

のように．また通常の数の積や和と同じように演算にも優先順位を決め，集合の演算では積を和に優先させる．例えば

$$A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$$

のように書く．ここで右辺は $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ という意味である．

一般には有限個の集合の和や積だけでなく，無限個の集合の和や積を考える必要がある．そのためには無限個の集合を考えなければならないが，そのような集合の集まり (集合の集合) のことを**集合族**という．集合族を $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ のように表すことが多い．このとき A を**添字集合**，A の元 α を**添字**と呼ぶ．A は一般に可算とは限らない無限集合で，1 つ 1 つの U_α が考察の対象となる集合を表している．これら，一般には無限個の集合の和集合を

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \{z \mid z \in U_\alpha \ \ (\exists \alpha \in A)\}$$

で表す．また積集合を

$$\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha = \{z \mid z \in U_\alpha \ \ (\forall \alpha \in A)\}$$

と書く．

例 A.1 自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$U_k = (1/k, 3 - 1/k) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/k < x < 3 - 1/k\}$$

を開区間とする．このとき集合族 $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ を考えると $\mathbb{N}$ が添字集合で k が添字である．和集合は $\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k = (0,3)$ であり，積集合は $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = (1,2)$ となる．

また $V_k = (-1/k, 1 + 1/k)$ (開区間) と置くと $\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k = [0,1]$ は閉区間となり，$W_k = [1/k, 3 - 1/k]$ (閉区間) と置くと $\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k = (0,3)$ は開区間である．

集合 X, Y に対して**差集合**を $X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$ で定める．これは X から Y に含まれている元をすべて取り除いて得られる集合である．

A.1.3 直積，写像

2 つの集合 A, B を考える．A と B の**直積**とは，

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

で与えられる集合である．ここで右辺は，A の要素と B の要素の組 (a,b) の全体からなる集合を表す．直積を取る集合は別に 2 つでなくてもよい．集合がいくつあっても，それぞれの集合から要素を取り，それを並べてできる組の全体が直積である．特に A 自身の n 個の直積を考えることができ，それを A^n と書く．$\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ あるいは $\mathbb{C}^n$ なども実数 $\mathbb{R}$ や複素数 $\mathbb{C}$ のいくつかの直積を表している．

A の任意の元 a に対して，B の元 $f(a)$ を唯一つ対応させる規則が与えられているとき，**写像** $f: A \to B$ が与えられているという．写像 $f: A \to B$ に対して，集合 A を f の**定義域**と呼び，f が値を取る集合 B を**値域**と呼ぶ．

写像を与えることと，$A \times B$ の部分集合 Γ であって，次の性質を持つものを与えることは同値である．

(∗) 任意の $a \in A$ に対して，$(a,b) \in \Gamma$ となるような $b \in B$ が唯一つ存在する．

実際，このような Γ が与えられれば，$(a,b) \in \Gamma$ のとき $b = f(a)$ と決めれば，写像 f が得られる．逆に，写像 f が与えられたときは，$\Gamma_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ が上の性質を持っている．この Γ_f を $f: A \to B$ の**グラフ**と呼ぶ．

集合 A が与えられたとき，特別な写像 $\mathrm{id}_A : A \to A$ を $\mathrm{id}_A(a) = a$ によって定め，これを**恒等写像**と呼ぶ．

A.1.4　像と逆像，全射と単射

写像 $f: A \to B$ を考えよう．A の部分集合 $U \subset A$ に対して U を f で写したものを U の f による**像**と呼び，

$$f(U) = \{f(u) \mid u \in U\}$$

と表す．また B の部分集合 V に対して V の元に写ってくる元の全体を V の f による**逆像**と呼び，

$$f^{-1}(V) = \{a \in A | f(a) \in V\}$$

と書く．また $f^{-1}(\{b\})$ を $f^{-1}(b)$ とも書き，1 点 b の**ファイバー**と呼ぶ．逆写像の記号と紛らわしいので注意せよ．しかしこの記号の合理性と便利さは，慣れ親しむうちに分かるようになるだろう．

写像 $f: A \to B$ が与えられたとする．$f(A) = B$ となるとき，f を**上への写像**，あるいは**全射**と呼ぶ．また，任意の $b \in B$ に対してそのファイバー $f^{-1}(b)$ が空集合または唯一つの元からなる集合であるときに f は**一対一写像**，または**単射**と呼ばれる．さらに f が全射かつ単射ならば**全単射**という．

次の補題が成り立つことはほぼ明らかであろう．

補題 A.2　写像 $f: A \to B$ を考える．

(1) f が全射であることと，任意の $b \in B$ に対して，ある $a \in A$ が存在して $b = f(a)$ が成り立つことは同値である．

(2) f が単射であることと，任意の $a_1, a_2 \in A$ に対して $f(a_1) = f(a_2)$ ならば $a_1 = a_2$ が成り立つことは同値である．

A.1.5　写像の合成

2 つの写像 $f: B \to C$ と $g: A \to B$ が与えられたとき写像 $f \circ g: A \to C$ を

$$f \circ g(a) = f(g(a)) \quad (a \in A)$$

によって定める．$f \circ g$ を f と g の**合成写像**と呼ぶ．

以下にあげるいくつかの性質は，群の演算として写像の合成を考えるときに重要になってくる．

補題 A.3　写像の合成について，結合律が成り立つ．つまり，3 つの写像

$$f: C \to D, \quad g: B \to C, \quad h: A \to B$$

に対して，$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ が成り立つ．

証明　$a \in A$ に対して $f \circ (g \circ h)(a) = f((g \circ h)(a)) = f(g(h(a)))$ だが，一方で $(f \circ g) \circ h(a) = (f \circ g)(h(a)) = f(g(h(a)))$ だから両者は等しい．■

補題 A.4　空でない集合 A, B に対して，写像 $f: A \to B$ を考える．

(1) f が全射であることと，ある写像 $g: B \to A$ が存在して $f \circ g = \mathrm{id}_B$ が成り立つことは同値である．

(2) f が単射であることと，ある写像 $g: B \to A$ が存在して $g \circ f = \mathrm{id}_A$ が成り立つことは同値である．

(3) f が全単射であることと，ある写像 $g: B \to A$ が存在して $f \circ g = \mathrm{id}_B$ かつ $g \circ f = \mathrm{id}_A$ が成り立つことは同値である．このとき g は f に対して唯一つに定まるので $g = f^{-1}$ と書き，f の**逆写像**と呼ぶ．

証明　(1) f を全射とすると $\forall b \in B$ に対して $f(a)=b$ となる $a \in A$ が存在する．そこで $g(b)=a$ と決めればよい (このような $a \in A$ は多数存在するかも知れないが，そのうちのどれでも良いから 1 つを選ぶ).

逆に g が存在したとすると $\forall b \in B$ に対して $a=g(b)$ と置くと $f(a)=f(g(b))=b$ である．したがって f は全射.

(2) f を単射とすると $\forall b \in B$ に対して $f(a)=b$ となる $a \in A$ がただひとつ存在するか，あるいは全く存在しないかのいずれかである．$f(a)=b$ となる $a \in A$ が存在するときは $g(b)=a$ と決める．そうでない場合には A の元を何でもよいから 1 つ選んでおいて a_0 とし，$g(b)=a_0$ と決めれば条件を満たす.

逆に g が存在したとすると $a \in A$ に対して $g(f(a))=a$ だから，像 $f(a)$ より逆像 a は唯一通りに決まる．これは f が単射であることを示す.

(3) f が全単射のとき，(1) より $f \circ g_1 = \mathrm{id}_B$ となる g_1 が存在し，(2) より $g_2 \circ f = \mathrm{id}_A$ となる g_2 が存在する．ところが $\forall b \in B$ に対して $g_2(b)=g_2(f \circ g_1(b))=(g_2 \circ f)(g_1(b))=g_1(b)$ であるから，2 つの写像 g_1, g_2 は一致する．これを g とすればよい．g が唯一つしかないこともこの議論より分かる.

逆に g が存在すれば (1) より f は全射，(2) より単射となって，f は全単射でなければならない. ■

A.2　コンパクト性

X を位相空間とする．位相空間の定義と基本的な性質については本文 §7.3.1 を参照してほしい．位相空間には開集合が定義されているのであった．X の開集合の族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対して

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

が成り立つとき $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を X の**開被覆**という．位相空間 X が**コンパクト**であるとは，X の任意の開被覆から有限個の部分被覆が選べるときに言う.

補題 A.5　$\mathbb{R}^n$ に通常のユークリッドの距離による位相を考えたとき，$\mathbb{R}^n$ の部分集合 X が誘導位相によってコンパクトであるための必要十分条件は X が有界閉集合であることである.

証明　$n=1$ のときに証明する．一般の場合は例えば [24] を参照してほしい.

$X \subset \mathbb{R}$ が有界閉集合であるとして，X の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を取る．有限個の部分被覆が選べることを背理法によって示そう．そこで X は有限個の被覆を持たないと仮定する．

X は有界であるから $X \subset [-M, M]$ となるような十分大きい $M > 0$ が存在する．このとき $X \cap [-M, 0]$ および $X \cap [0, M]$ がどちらも有限被覆を持っていれば X も有限個の被覆を持つから，どちらかは有限個の被覆を持たない．例えばそれが $X \cap [0, M]$ とすると $X \cap [0, M/2]$ および $X \cap [M/2, M]$ を考えれば，このどちらかは有限個の被覆を持たない．以下同様にして続けると，ある空でない有界閉集合の単調減少列 $I_k = X \cap [a_k, b_k]$ かつ $|b_k - a_k| = 2^{-k}M$ であって，しかも有限個の開被覆を持たないものが取れる．

有界閉集合の単調減少列の共通部分は空でないから $\cap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \varnothing$ である[1]．そこで $x \in \cap_{k=1}^{\infty} I_k$ を取ると $x \in U_\alpha$ となるような開集合が存在する．このとき x を含む十分小さな開球は U_α に含まれるが，それはある十分大きな k に対して I_k を含む．すると I_k は唯一つの開集合からなる開被覆 U_α を持つことになり，矛盾である．

逆に X がコンパクトであるとしよう．X を半径が 1 の開球たちで覆うと，そこから有限個の開被覆が取れるので X は有界である．次に補集合 $\mathbb{R} \setminus X$ が開集合であることを示そう．これが分かれば X は閉集合である．そこで $z \in \mathbb{R} \setminus X$ を取る．任意の $x \in X$ に対して $\varepsilon = |z - x|/2 > 0$ と置いて

$$V_x = \{y \in \mathbb{R} \mid |z - y| < \varepsilon\}, \quad U_x = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\}$$

と置く．$V_x \cap U_x = \varnothing$ に注意しよう．このとき $x \in U_x$ であるから，明らかに $\{U_x\}_{x \in X}$ は X の開被覆である．X のコンパクト性より，この開被覆から有限個の被覆 $U_{x_1}, \ldots, U_{x_m}$ を選び

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$$

とできる．$D = \bigcap_{i=1}^{m} V_{x_i}$ と置くと $D \cap X = \varnothing$ であって，しかも D は有限個の開集合の共通部分であるから開集合である．これより $z \in D \subset \mathbb{R} \setminus X$ は z の開近傍であってしかも $\mathbb{R} \setminus X$ に含まれている．つまり z は $\mathbb{R} \setminus X$ の内点であり，

---

1) この性質は実数の完備性 (あるいは連続性) と深く関わっている．詳しくは [33] 参照．

z は任意だったので $\mathbb{R} \setminus X$ は開集合である． ∎

補題 A.6　X, Y を位相空間とし $f : X \to Y$ を連続写像とする．このとき X がコンパクトなら，その像 $f(X)$ もコンパクトである．

証明　$f(X)$ の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を取ると，f が連続なので $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ は X の開被覆である．したがって有限個の X の被覆 $f^{-1}(U_{\alpha_1}), \ldots, f^{-1}(U_{\alpha_m})$ が取れるが，このとき $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_m}$ が $f(X)$ の開被覆になる． ∎

演習問題の解答

演習 1.15 (p.21)　$\#D_4 = 8$ だが $\#\mathfrak{S}_4 = 24$ なので同じものとはみなせない．

演習 1.19 (p.24)　$\#G_E = 4, \#G_V = 4e/v = 2fp/v$.

演習 2.2 (p.32)　$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = e_1^2 - 2e_2$, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3e_3 = e_1(e_1^2 - 3e_2)$.

演習 2.4 (p.34)　式 (2.2) より $3\alpha = r + s + t, 9\beta\gamma = r^2 + s^2 + t^2 - rs - st - tr$ が分かる．したがって (右辺) $= 27\alpha\beta\gamma = 27e_3$ である．一方，前問を用いて (左辺) $= e_1^3 + (s^3 + t^3) - 3e_1(e_1^2 - 3e_2) = (s^3 + t^3) - 2e_1^3 + 9e_1e_2$ だから $s^3 + t^3 = 27e_3 + 2e_1^3 - 9e_1e_2$.

演習 2.5 (p.34)　両辺に $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$ を代入してみる．$(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$ のとき，$s = t = 1, e_1 = 1, e_2 = e_3 = 0$ だから $1^3 + 1^3 = a \cdot 0 + b \cdot 1^3 + c \cdot 0$, $\therefore b = 2$. $(1, 1, 0)$ のとき $s = -\omega^2, t = -\omega, e_1 = 2, e_2 = 1, e_3 = 0$ だから $(-\omega^2)^3 + (-\omega)^3 = a \cdot 0 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2$, $\therefore c = -9$. $(1, 1, 1)$ のとき $s = t = 0, e_1 = 3, e_2 = 3, e_3 = 1$ だから $0^3 + 0^3 = a \cdot 1 + b \cdot 3^3 + c \cdot 3 \cdot 3$, $\therefore a = 27$.

演習 2.6 (p.36)　$\tau(X_1) = X_2, \tau(X_2) = X_1, \tau(X_3) = X_3, \quad \therefore \tau \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}$.

演習 2.8 (p.37)　$\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to (\mathbb{C}^\times, \times)$, 準同型であることは，行列式の性質 $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$ より従う．

演習 2.15 (p.39)　$\mathrm{Ker}\exp = \{0\}$, $\mathrm{Ker}\log = \{1\}$, Ker(絶対値) $= \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Ker}\det = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. したがって exp, log は同型写像 (互いに逆写像となっている).

演習 2.17 (p.41)　$tuv = e_1^3 - 4e_1e_2 + 8e_3$.

演習 2.18 (p.41)　$t^2 + u^2 + v^2 = 3e_1^2 - 8e_2, t^2u^2 + u^2v^2 + v^2t^2 = 3e_1^4 + 16e_1e_3 - 16e_1^2e_2 + 16e_2^2 - 64e_4$.

演習 3.13 (p.59)　$\dim R_d = \begin{pmatrix} d + n - 1 \\ n - 1 \end{pmatrix}$.

演習 6.11 (p.139)　1 つの非退化 2 次曲線は単位円としてよい．そこで，単位円を不変にするような射影変換によって残りの 2 次曲線がどのような標準形を持つかを考えればよい．単位円を保つような射影変換は不定値直交群 $\mathrm{O}_{2,1}(\mathbb{R})$ であるから，結局 $\mathrm{O}_{2,1}(\mathbb{R})$ による $\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$ の軌道分解を考えることになる．これは $\mathrm{O}_{2,1}(\mathbb{R})\backslash\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{O}_{2,1}(\mathbb{R})$ を考えることにほぼ等しい．不定値直交群や両側軌道分解については次の章を参照してほしい．

参考文献

[1] Armand Borel, *Linear algebraic groups*, Vol. 126 of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[2] S. C. カールソン (金信泰造訳),『曲面・結び目・多様体のトポロジー』, 培風館, 2003.

[3] R. デーデキント (河野伊三郎訳),『数について：連続性と数の本質』, 岩波文庫. 岩波書店, 1961.

[4] Roger Howe, Perspectives on invariant theory : Schur duality, multiplicity-free actions and beyond, In *The Schur lectures (1992) (Tel Aviv)*, Vol. 8 of *Israel Math. Conf. Proc.*, pp.1–182, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1995.

[5] A. フルヴィッツ, R. クーラント (足立恒雄・小松啓一訳),『楕円関数論』, シュプリンガー数学クラシックス, 第 2 巻, シュプリンガー・ジャパン, 復刻版, 2007.

[6] D. フーズモラー (三村護訳),『ファイバー束』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2002.

[7] Felix Klein,『クライン：19 世紀の数学』, 共立出版, 1995.

[8] F. クライン (関口次郎・前田博信訳),『正 20 面体と 5 次方程式』, シュプリンガー数学クラシックス, 第 5 巻, シュプリンガー・フェアラーク東京, 改訂新版, 2005.

[9] Peter Magyar, Jerzy Weyman, and Andrei Zelevinsky, Multiple flag varieties of finite type, *Adv. Math.*, Vol. 141, No. 1, pp.97–118, 1999.

[10] Kyo Nishiyama and Hiroyuki Ochiai, Double flag varieties for a symmetric pair and finiteness of orbits, *J. Lie Theory*, Vol. 21, No. 1, pp.79–99, 2011.

[11] V. L. Popov and È. B. Vinberg, Invariant theory, In I. R. Shafarevich, editor, *Algebraic geometry. IV*, Vol. 55 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, pp.123–278. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[12] J.P. セール (彌永健一訳),『数論講義』, 岩波書店, 1979.

[13] J.H. シルヴァーマン, J. テイト (足立恒雄訳),『楕円曲線論入門』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995.

[14] T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, Vol. 9 of *Progress in Mathematics*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 1998.

[15] スチーンロッド (大口邦雄訳),『ファイバー束のトポロジー』, 数学叢書, 吉岡書店, 1976.

[16] John R. Stembridge, Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters, *Represent. Theory*, Vol. 7, pp.404–439 (electronic), 2003.

[17] Oscar Zariski and Pierre Samuel, *Commutative algebra. Vol. 1 & 2*, Springer-Verlag, New York, 1975, With the cooperation of I. S. Cohen, Corrected reprinting of the 1958 edition, Graduate Texts in Mathematics, No. 28 & 29.

[18] S.G. ギンディキン,『ガウスが切り開いた道』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1996.

[19] H. ワイル,『古典群 不変式と表現』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2004, シュプリンガー数学クラシックス第15巻.

[20] 猪狩惺,『フーリエ級数』, 岩波全書, 岩波書店, 1975.

[21] 彌永昌吉,『数の体系 (上・下)』, 岩波新書, 岩波書店, 1972.

[22] 岩堀長慶,『初学者のための 合同変換群の話 — 幾何学の形での群論演習 —』, 現代数学社, 2000.

[23] 岩堀長慶,『対称群と一般線型群の表現論：既約指標・Young 図形とテンソル空間の分解』, 岩波講座基礎数学, 岩波書店, 1987.

[24] 内田伏一,『集合と位相』, 数学シリーズ, 裳華房, 1986.

[25] 太田琢也, 西山享,『行列群の作用と軌道』, 数学の杜, 数学書房, 2013 (予定).

[26] 大田春外,『はじめよう位相空間』, 日本評論社, 2000.

[27] 岡田聡一,『古典群の表現論と組合せ論〈上・下〉』, 数理物理シリーズ, 培風館, 2006.

[28] 小平邦彦,『怠け数学者の記』, 岩波現代文庫, 岩波書店, 2000.

[29] 小林一章,『曲面と結び目のトポロジー：基本群とホモロジー群』, すうがくぶっくす, 朝倉書店, 1992.

[30] 小林俊行, 大島利雄,『リー群と表現論』, 岩波書店, 2005.

[31] 佐武一郎,『線型代数学』, 数学選書, 裳華房, 増補改題, 1974.

[32] 神保道夫,『複素関数入門』, 現代数学への入門, 岩波書店, 2003.
[33] 杉浦光夫,『解析入門 (I・II)』, 基礎数学, 東京大学出版会, 1980.
[34] 高木貞治,『代数学講義　改訂新版』, 共立出版, 1965 (原版 1930).
[35] 高木貞治,『近世数学史談』, 岩波文庫, 岩波書店, 1995.
[36] 谷口雅彦, 奥村善英,『双曲幾何学への招待 : 複素数で視る』, 培風館, 1996.
[37] 寺沢寛一,『自然科学者のための数学概論』, 岩波書店, 増訂版改版, 1983.
[38] 寺田至, 原田耕一郎,『群論』, 岩波書店, 2006.
[39] 戸田盛和,『楕円関数入門』, 日評数学選書, 日本評論社, 2001.
[40] 西山享,『重点解説 ジョルダン標準形 : 行列の標準形と分解をめぐって』, 臨時別冊・数理科学, SGC ライブラリ; 77, サイエンス社, 2010.
[41] 長谷川浩司,『線型代数学』, 日本評論社, 2004.
[42] 原田耕一郎,『群の発見』, 岩波書店, 2001.
[43] 一松信,『正多面体を解く』, Tokai library, 東海大学出版会, 2002.
[44] 一松信,『高次元の正多面体』, 数セミ・ブックス, 日本評論社, 1983.
[45] 平井武,『線形代数と群の表現 1,2』, 朝倉書店, 2001.
[46] 深谷賢治,『双曲幾何』, 現代数学への入門, 岩波書店, 2004.
[47] 堀田良之,『代数入門 — 群と加群 —』, 裳華房, 1987.
[48] 堀田良之,『可換環と体』, 岩波書店, 2006.
[49] 松坂和夫,『集合・位相入門』, 岩波書店, 1968.
[50] 松澤淳一,『特異点とルート系』, 朝倉書店, 2002.
[51] 松村英之,『可換環論』, 共立出版, 復刊, 2000.
[52] 村上信吾,『連続群論の基礎』, 基礎数学シリーズ, 朝倉書店, 復刊, 2004.
[53] 室井和男,『バビロニアの数学』, 東京大学出版会, 2000.
[54] 吉田正章,『私説超幾何関数 : 対称領域による点配置空間の一意化』, 共立講座 21 世紀の数学, 共立出版, 1997.

索引

■ **A** ■

■ **C** ■

■ **D** ■

■ **E** ■

■ **G** ■

■ **H** ■

■ **J** ■

■ **K** ■

■ **N** ■

■ さ行 ■

■ は行 ■

■ ま行 ■

■ や行 ■

西山 享(にしやま きょう)

1958年神戸市生まれ．1980年京都大学理学部数学科卒業．
東京電機大学助手，京都大学准教授を経て現在，青山学院大学理工学部教授．専門は表現論．
著書に『多項式のラプソディ』(日本評論社),『よくわかる幾何学 — 複素平面・初等幾何学・射影幾何学をめぐって』(丸善),『重点解説 ジョルダン標準形 — 行列の標準形と分解をめぐって』(サイエンス社)など．

幾何学と不変量(きかがくとふへんりょう)

2012年9月15日　第1版第1刷発行

著　者　西山　享
発行者　黒田敏正
発行所　株式会社日本評論社
〒170-8474　東京都豊島区南大塚3-12-4
電話　03-3987-8621 (販売)　03-3987-8595 (編集)
印刷所　藤原印刷
製本所　精光堂
装　幀　林 健造

Printed in Japan,　ISBN 978-4-535-78463-5